



**ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE**

**Laboratori Nazionali di Frascati**

---

**INFN-DIV-16-01/LNF**  
**18<sup>th</sup> January 2016**

# **La Realtà Quantistica**

Danilo Babusci, Matteo Mascolo

*INFN-Laboratori Nazionali di Frascati Via E. Fermi 40, Frascati, Italy*

Publicato da SIDS–Pubblicazioni  
Laboratori Nazionali di Frascati

*Questa nota fa parte di una serie di dispense distribuite durante il corso “Incontri di Fisica Moderna”, rivolto ai docenti di Matematica e Fisica dei Licei Scientifici. Il corso si è svolto, presso i Laboratori Nazionali di Frascati, nel periodo Novembre 2015 – Maggio 2016, ed è consistito di 15 lezioni di tre ore ciascuna.*

# Indice

<b>Indice</b>	<b>iii</b>
<b>1 La crisi della Fisica Classica e l'ipotesi di Planck</b>	<b>1</b>
1.1 Il problema del corpo nero . . . . .	1
1.2 La rivoluzione di Planck . . . . .	11
<b>2 Onde &amp; Particelle</b>	<b>23</b>
2.1 L'esperimento delle due fenditure ... . . . .	23
2.1.1 ... con i proiettili . . . . .	23
2.1.2 ... con le onde . . . . .	25
2.1.3 ... con gli elettroni . . . . .	27
2.2 Osservando gli elettroni . . . . .	31
2.3 Onde di materia . . . . .	33
2.4 Atomo di Bohr . . . . .	35
2.5 Onde di probabilità . . . . .	38
2.6 Effetto fotoelettrico . . . . .	40
2.7 Il Principio d'Indeterminazione di Heisenberg . . . . .	42
2.8 Conseguenze del Principio d'Indeterminazione . . . . .	48
2.8.1 Concetto di traiettoria . . . . .	48
2.8.2 Dimensioni atomiche . . . . .	48
2.9 Indeterminazione Energia-Tempo . . . . .	50
2.9.1 Decadimento di stati instabili . . . . .	50
2.9.2 Il Principio d'Indeterminazione e la causalità . . . . .	52
2.10 Esperimenti con fotoni . . . . .	55
2.10.1 Fotoni . . . . .	60
2.10.2 Dualità onda-particella per un singolo fotone . . . . .	62
2.10.3 Esperimenti a scelta ritardata . . . . .	63
<b>3 L'interpretazione della Meccanica Quantistica</b>	<b>69</b>
3.1 Bohr e Einstein . . . . .	69
3.2 Schrödinger, von Neumann e Wigner . . . . .	76

---

3.3	Molti mondi . . . . .	78
3.4	La teoria della decoerenza . . . . .	80
<b>4</b>	<b>L'articolo EPR</b>	<b>83</b>
4.1	EPR nella versione di Bohm . . . . .	86
4.1.1	EPR secondo la Meccanica Quantistica . . . . .	88
4.1.2	EPR e la Relatività Speciale . . . . .	89
<b>5</b>	<b>La disuguaglianza di Bell</b>	<b>91</b>

# Capitolo 1

## La crisi della Fisica Classica e l'ipotesi di Planck

### 1.1 Il problema del corpo nero

Germania, 1877. Un neanche ventenne Max Planck decide di lasciare l'università di Monaco e trasferirsi a Berlino per terminare gli studi in fisica, anche lui fedele (come molti dei suoi coetanei), alla moda alto-borghese dell'epoca di effettuare gli studi universitari in più di una sede di prestigio. A Berlino, ha l'occasione di seguire le lezioni di alcune tra le figure di spicco del panorama scientifico XIX secolo, come Hermann von Helmholtz e Gustav Kirchhoff. Planck era tuttavia uno studente abbastanza fuori dal comune, e non esitava nel considerare quegli stessi professori piuttosto mediocri. A sua detta, sembra che Helmholtz fosse talmente annoiato nel tenere le sue lezioni, da commettere continui errori nei calcoli che effettuava alla lavagna.

Il professore, ad onor del vero, aveva una scusa più che valida per non preparare le proprie lezioni. Egli fu infatti tra i primi a promuovere la teoria elettromagnetica di Maxwell all'interno del proprio paese; fu su



Figura 1.1: Il giovane Max Planck

sua esplicita richiesta che, nel luglio del 1879, l'Accademia Prussiana delle Scienze di Berlino istituì un premio in favore di una dimostrazione sperimentale delle previsioni fornite dalla nuova teoria elettromagnetica. Il fisico che riuscì nell'impresa fu un giovane coetaneo di Planck, nonché allievo prediletto del professore: Heinrich Rudolf Hertz.

Nel 1888, Hertz dimostrò per primo l'esistenza delle onde elettromagnetiche grazie ad un apparato di sua costruzione (chiamato dipolo hertziano), in grado di emettere onde radio. La scoperta delle onde elettromagnetiche sancisce la definitiva consacrazione della teoria di Maxwell. Grazie a questi successi sperimentali, negli ultimissimi anni dell'800, germoglia all'interno della comunità scientifica la convinzione che il compito della fisica sia "ormai pressoché terminato". Il genio di Newton ha reso possibile la comprensione della meccanica dei corpi, quello di Maxwell dei fenomeni elettromagnetici, facendo apparire completo il quadro di comprensione della Natura. Gli stessi professori di Planck, di cui sopra, sono fermamente convinti che ormai resti soltanto da "misurare meglio alcune quantità" e spiegare una manciata di fenomeni di "minor conto", tra cui:

- la capacità della luce ultravioletta di indurre una corrente in un conduttore (fenomeno noto col nome di *effetto fotoelettrico*);
- gli spettri "a righe" di assorbimento ed emissione dei gas;
- il problema della radiazione di *corpo nero*.

Tutti erano ignari del fatto che questi tre problemi, e in particolare quello dello spettro di corpo nero, avrebbero segnato il decisivo punto di svolta nella comprensione della realtà fisica. Fu, infatti, proprio lo studio di questi fenomeni a innescare la "crisi" della meccanica classica, e portare alla nascita della *meccanica quantistica*.

Vogliamo ora concentrarci proprio sull'ultimo dei tre punti elencati. Non è in alcun modo riduttivo affermare che l'origine del problema del corpo nero risieda in osservazioni sistematiche di fenomeni legati a necessità industriali. La comprensione dei corpi incandescenti, infatti, aveva un enorme impatto nelle produzioni industriali di oggetti come stufe, piastre elettriche, lampade, etc. L'obiettivo degli ingegneri dell'epoca, come Werner Siemens<sup>1</sup>, consisteva nello sviluppo di uno standard di misurazione dell'intensità luminosa. L'idea era quella di poter misurare la temperatura di oggetti incandescenti (in fase di produzione e non), sulla base dell'analisi della radiazione che essi emettono. Si manifestava dunque la necessità di potersi avvalere di un modello

---

<sup>1</sup>Fondatore dell'omonima azienda, giunta fino ai nostri giorni grazie agli innumerevoli brevetti di apparecchiature elettriche.

di riferimento, ovvero di un oggetto in grado di fornire una radiazione indipendente dalla sua natura (i.e., forma e composizione chimica), e dipendente solo dalla temperatura. Tale oggetto di riferimento, come vedremo tra breve, ha proprio il nome di *corpo nero*.

A livello sperimentale, non ci furono problemi di sorta. Nel giro di pochissimi anni fu possibile misurare lo spettro dei corpi incandescenti con grandissima precisione. Le difficoltà si affacciarono invece tutte al livello di comprensione teorica di tali distribuzioni spettrali. I fisici osservarono infatti un evidente disaccordo tra la distribuzione dei colori della luce emessa da queste sorgenti calde (come carbone e metallo fuso) e la corrispondente predizione teorica “classica”<sup>2</sup>. Con riferimento alle numerose osservazioni compiute dagli istituti di ricerca tecnologica, lo stesso Planck affermerà in quegli anni che: “[...] qualcosa di imponente sta emergendo dalla osservazione di un semplice pezzo di carbone ardente.”

Ma facciamo qualche passo indietro, prima di entrare nel merito della questione del *corpo nero*. Tutti noi abbiamo esperienza del fatto che una brace gialla in un camino ardente (1400-1600°C) risulta più calda di una brace rossa di un camino in via di spegnimento (1200-1300°C). All’aumentare della temperatura, il colore della luce emessa si sposta dal rosso verso il blu. La correlazione tra il colore della radiazione termica emessa e la temperatura di oggetti incandescenti, incuriosì l’astronomo anglo-tedesco William Herschel che, già nel 1800 (prima dell’insorgere delle necessità industriali di cui si è appena parlato), effettuò una scoperta sorprendente. Facendo passare la luce del Sole attraverso un prisma e, facendo in modo che ognuno dei colori in cui veniva scomposta la luce andasse a colpire uno solo dei diversi termometri disposti su di un banco, si accorse che i termometri non indicavano tutti la stessa temperatura. Si tratta della prima evidenza del fatto che l’intensità della radiazione che proviene dal Sole è diversa per ognuna delle lunghezze d’onda incidenti. In particolare, la distribuzione spettrale della radiazione emessa dal Sole, assomiglia moltissimo a quella del già citato corpo nero.

In realtà, ogni corpo che non si trovi in equilibrio termico con l’ambiente che lo circonda, emette radiazione in forma di comune calore. Il fenomeno è riconducibile all’oscillazione delle cariche del corpo stesso che, in accordo con la teoria di Maxwell (e le osservazioni di Hertz) muovendosi emettono radiazione, rallentando. In questo modo il corpo si raffredda. Ma c’è di più: ogni corpo emette in tutte le lunghezze d’onda, ma la distribuzione dell’energia in funzione di tale variabile dipende dalla sua temperatura. Lo stesso corpo umano, a 37 °C, emette radiazione elettromagnetica, ma il picco

---

<sup>2</sup>Per “teoria classica” si intende l’insieme delle leggi derivate dalla termodinamica e dall’elettromagnetismo allora note.

di emissione si ha per lunghezze d'onda nell'intorno di  $9 \mu\text{m}$ , nella regione infrarossa dello spettro (si veda la Fig. 1.2, a sinistra). Al di sotto di  $3 \mu\text{m}$ , per contro, l'emissione è praticamente trascurabile, motivo per cui si osserva che il corpo umano non emette radiazione nello spettro visibile ( $0.4 \div 0.8 \mu\text{m}$ ). Oggetti molto più caldi del corpo umano, come una lampadina ad incandescenza, emettono secondo una curva di intensità che assomiglia a quella del corpo umano, ma decisamente spostata verso lunghezze d'onda più piccole, come mostrato dalla Fig. 1.2 (destra). Il massimo di emissione, stavolta, si osserva per lunghezze d'onda nell'intorno del  $\mu\text{m}$ , a  $3000 \text{ K}$ . In tal modo, la banda del visibile ha un'intensità non trascurabile, e per questo la lampadina fornisce una radiazione percepibile dall'occhio umano.

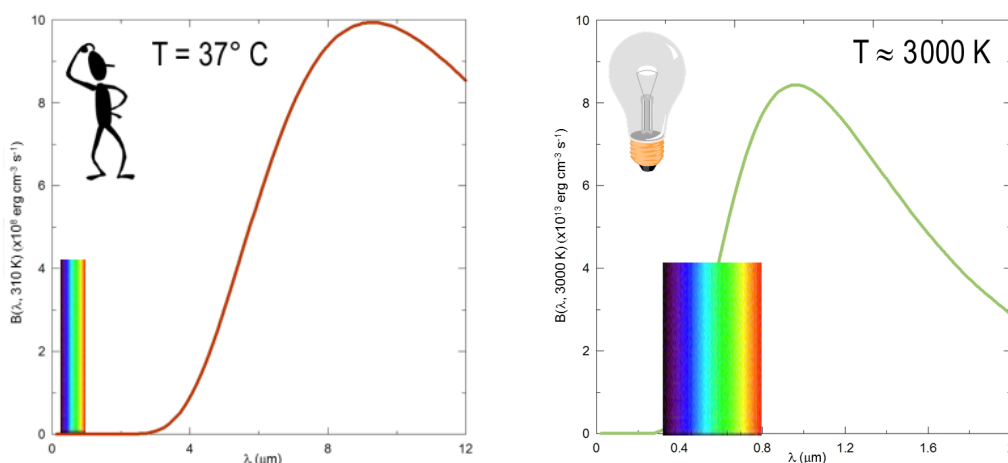


Figura 1.2: Spettri di emissione di un corpo umano a  $37 \text{ }^\circ\text{C}$  (sinistra) e di una lampadina a incandescenza a  $3000 \text{ K}$  (destra). Il potere emissivo del corpo umano in corrispondenza della banda del visibile è praticamente nullo, motivo per cui un corpo umano non brilla di luce propria. Al contrario, la lampadina ha un picco di emissione in prossimità delle lunghezze d'onda della luce visibile.

All'equilibrio, i corpi incandescenti emettono necessariamente la stessa quantità di radiazione che assorbono. L'emissività,  $e$ , e l'assorbimento,  $a$ , rispettivamente indici della capacità di irraggiare e assorbire la radiazione elettromagnetica, per corpi in tali condizioni sono, quindi, uguali. Nello specifico, l'emissività di un materiale è definita come la frazione di energia irraggiata da quel materiale rispetto all'energia irraggiata da un corpo di riferimento che si trovi alla stessa temperatura. Come corpo di riferimento si assume il *corpo nero*, definito come “*un oggetto in equilibrio termico in grado di assorbire completamente tutta la radiazione incidente e, allo stesso modo, in*



*grado di emettere la stessa radiazione che è in grado di assorbire*". Si ponga attenzione al fatto che la radiazione incidente non viene mai riflessa, ma sempre completamente assorbita.

Per cercare di capire come mai un corpo nero debba necessariamente irradiare energia (e non solo assorbirla) si immagini di avere un corpo incandescente di fronte ad un oggetto nero e che i due siano perfettamente isolati rispetto all'ambiente che li circonda (ovvero non c'è possibilità che il calore venga disperso). Con il passare del tempo, l'oggetto nero assorbirà tutto il calore emesso dall'altro corpo e, di conseguenza, si riscalderà. Quando le temperature dei due corpi saranno uguali, il corpo nero non potrà più assorbire l'energia di quello incandescente, altrimenti il secondo principio della termodinamica verrebbe violato. L'unico modo di continuare ad assorbire l'energia irraggiata è che venga irradiata energia in uguale misura. La difficoltà di cogliere a pieno la natura di un corpo nero ideale sta nel fatto che esso non esiste in natura. Molti degli oggetti che assorbono radiazione nella banda del visibile non la assorbono nella banda dell'ultravioletto o infrarosso, o viceversa: in altre parole, per tali oggetti è  $a < 1$ .

Per questo motivo, i fisici sperimentali del XIX secolo dovettero inventare un sistema da laboratorio in grado di comportarsi nel modo più simile possibile ad un corpo nero ideale. Il primo a proporre un modello di corpo nero soddisfacente fu proprio uno dei professori che Planck non amava in giovinezza: Gustav Kirchhoff. Nonostante Kirchhoff annoiasse i suoi studenti per motivi opposti a quelli di Helmholtz - si dice che preparasse delle lezioni così minuziosamente da recitarle quasi a memoria -, egli ebbe l'intuizione di paragonare la radiazione di corpo nero ad una certa temperatura, a quella emessa attraverso un foro molto piccolo praticato in una cavità le cui pareti si trovino a quella stessa temperatura (si veda la Fig. 1.3).

Una radiazione di frequenza arbitraria che entrasse attraverso il foro della cavità verrebbe assorbita e riemessa un numero infinito di volte dalle pareti interne, rimanendo intrappolata nella cavità. In tal senso, il foro si comporta come un corpo nero: tutta la radiazione incidente viene "assorbita", senza essere mai riflessa<sup>3</sup>. Allo stesso tempo, la probabilità che della radiazione fuoriesca dal foro è estremamente bassa, motivo per cui anche se questa fuoriuscisse, non verrebbe alterato l'equilibrio della cavità. La radiazione intrappolata all'interno rappresenta dunque una buona approssimazione della radiazione di corpo nero. Con dei semplici ragionamenti di bilancio energetico e avvalendosi del *principio dell'equilibrio dettagliato*<sup>4</sup>, Kirchhoff capì che

<sup>3</sup>Questo è il motivo per cui l'ingresso di una chiesa molto grande appare nero a chi la osserva da molto lontano.

<sup>4</sup>Secondo tale principio, l'uguaglianza tra quantità di energia emessa e assorbita da un corpo in equilibrio termico è valido per ogni lunghezza d'onda della radiazione scambiata.

l'intensità, per unità di lunghezza d'onda, della radiazione all'interno della cavità è indipendente dalla forma e dalla natura delle pareti, e dipende soltanto dalla temperatura dell'oggetto. Nel suo discorso di accettazione del premio

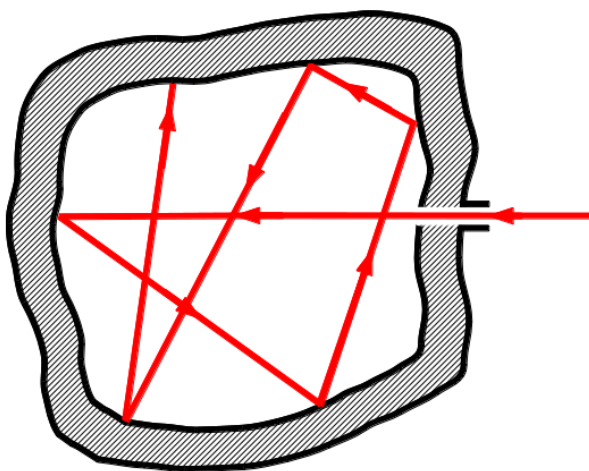


Figura 1.3: Rappresentazione del comportamento della radiazione “intrappolata” in una cavità in cui è praticato un piccolo foro.

Nobel per la fisica, Planck riconoscerà l'importanza del modello di Kirchhoff per lo sviluppo della sua teoria, affermando: *“Kirchhoff ha dimostrato che lo stato della radiazione termica all'interno di una cavità delimitata da una sostanza, di qualsiasi natura, che la assorbe e la emette, a una temperatura uniforme, è totalmente indipendente dalla natura della sostanza stessa. È stata così dimostrata l'esistenza di una funzione universale che dipende solo dalla temperatura e dalla lunghezza d'onda (come dalla frequenza), ma in nessun modo dalle proprietà di alcuna sostanza. La scoperta di tale funzione straordinaria prometteva una comprensione più profonda della relazione tra energia e temperatura che è, di fatto, il problema più importante della termodinamica e, di conseguenza, di tutta la fisica molecolare.”*

Quando Planck inizia ad interessarsi al problema della radiazione di corpo nero è già professore universitario e membro dell'Accademia delle Scienze; siamo nel 1894. È assolutamente sorprendente - forse, addirittura incredibile -, pensare che Planck si avvicinò al problema con l'intento di dare una giustificazione teorica ai processi termodinamici irreversibili (come quello che porta all'equilibrio termico nella cavità), senza dover ricorrere né all'ipotesi atomica, né all'interpretazione statistica dell'entropia (data da Boltzmann qualche anno prima). Ancora molto lontano dalle nuove idee quantistiche, Planck inizia a lavorare sotto l'influenza delle tesi antiatomistiche della cosiddetta

schiera degli “energetisti”. Questi ultimi, ritenevano che la termodinamica fosse il quadro perfetto per lo sviluppo di un modello completo della natura. Guidati solo dal primo principio della termodinamica - dunque, dalla conservazione dell’energia -, gli energetisti dubitavano persino dell’esistenza degli atomi. Con queste premesse, lo sforzo intellettuale che fece Planck nell’introdurre la teoria quantistica merita un’ammirazione particolare: pur non credendo nell’esistenza degli atomi, aprì la strada alla comprensione della natura discreta dell’“infinitamente piccolo”.

Nell’elaborazione della teoria di Planck, giocò un ruolo fondamentale la possibilità di accedere alle misure sperimentali dei fisici del vicino Istituto Imperiale di Fisica e Tecnologia. Gli scienziati di tale istituzione furono infatti tra i primi a fornire delle accurate distribuzioni spettrali della radiazione dei corpi neri, ovvero del modo in cui l’intensità della radiazione emessa varia con la lunghezza d’onda. Fin da subito, tali misure sperimentali, consentirono di evidenziare delle importanti caratteristiche di tali spettri. Dai dati si verificò, ad esempio, che la forma dello spettro di un corpo nero è definita *solo* dalla temperatura, come previsto da Kirchhoff. Questo significa che tutti i corpi incandescenti, ad una data temperatura, emettono radiazione termica secondo una distribuzione in lunghezza d’onda che è ben approssimata da quella di un corpo nero ideale alla stessa temperatura (è il caso dello spettro del Sole, come vedremo meglio in seguito).

Tra i fisici dell’Istituto Imperiale di Fisica e Tecnologia impegnati in questo tipo di studi, uno, poco più giovane di Planck, nel 1911 avrebbe ricevuto il Premio Nobel proprio per le sue ricerche sul corpo nero. Si tratta di Wilhelm Wien, il quale, avvalendosi di argomentazioni di termodinamica e di elettromagnetismo fu in grado di stabilire che il *potere emissivo*, ovvero la potenza per unità di superficie emessa in un intervallo infinitesimo di lunghezza d’onda, dipende da temperatura e lunghezza d’onda nel modo seguente:

$$\Psi_\lambda = \frac{1}{\lambda^5} F(\lambda T) \quad (1.1)$$

dove la funzione  $F$  dipende del prodotto tra lunghezza d’onda e temperatura (e non delle due grandezze in maniera separata). Come vedremo, tale funzione non risulta in nessun modo calcolabile con un approccio di tipo classico. Sulla base della sua formulazione teorica, e grazie alla ormai elevata affidabilità delle misure sperimentali, Wien poté anche dedurre una relazione che lega la lunghezza d’onda cui corrisponde il massimo dell’emissione alla temperatura, anche nota come *legge dello spostamento di Wien*:

$$\lambda_{\max} T = \text{costante} \quad (1.2)$$

dove il valore della costante, ricavato empiricamente, è  $2.898 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$ . Se-

condo tale legge, con il crescere della temperatura del corpo nero, diminuisce la lunghezza d'onda a cui viene irradiata la maggior quantità di energia (si vedano gli spettri riportati in Fig. 1.4). Il risultato è assolutamente compa-

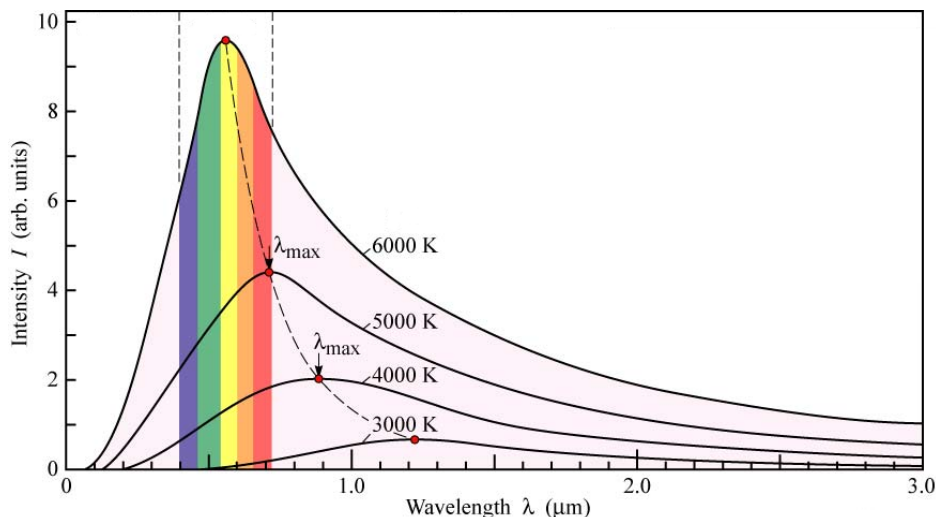


Figura 1.4: Intensità della radiazione termica di corpo nero (in unità arbitrarie), in funzione della lunghezza d'onda di emissione, per diversi valori di temperatura.

tibile con l'esperienza quotidiana: la luce che proviene da corpi incandescenti si sposta dal rosso verso il giallo, e poi verso il blu, all'aumentare della temperatura. Si ricordi ancora il caso della brace nel camino: quando la fiamma è ancora attiva, la brace assume una colorazione gialla, quando il fuoco è spento, e quindi la temperatura più bassa, la brace assume una colorazione rossa<sup>5</sup>.

La (1.2) ci consente di risalire alla temperatura di un corpo in emissione, nota la lunghezza d'onda cui l'emissione è massima (non necessariamente nel visibile)<sup>6</sup>. Ad esempio, sapendo che il massimo di emissione della radiazione solare è nell'intorno di  $0.5 \mu\text{m}$ , si può stabilire che la temperatura superficiale del Sole è di circa 5800 K (cfr. Fig. 1.5).

Contemporaneamente a Wien e Planck, altri fisici di rilievo, come Josef Stefan, contribuirono alla comprensione della radiazione emessa da un corpo

<sup>5</sup>La lunghezza d'onda del colore rosso ( $\lambda_{\text{rosso}} \approx 620 - 750 \text{ nm}$ ) è maggiore di quella del colore giallo ( $\lambda_{\text{giallo}} \approx 570 - 590 \text{ nm}$ )

<sup>6</sup>La legge di Wien trova applicazione diretta nel cosiddetto *pirometro*. Si tratta sostanzialmente di uno strumento in grado di confrontare la luminosità di un corpo, di cui si vuole misurare la temperatura, con quella di un filamento di tungsteno di temperatura misurabile.

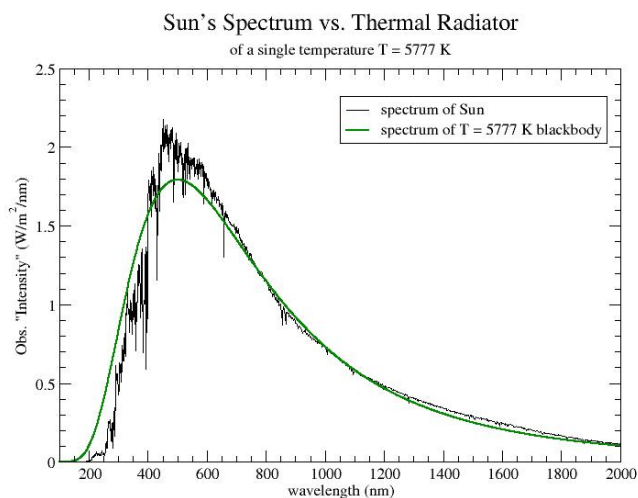


Figura 1.5: Confronto tra lo spettro della radiazione solare, misurata fuori dell'atmosfera terrestre (curva nera), e quello prevista per un corpo nero alla temperatura di 5777 K (curva verde). Le stelle, enormi sfere di materiale incandescente, emettono radiazione termica simile a quella di un corpo nero alla temperatura della superficie stellare.

nero. Basandosi su osservazioni sperimentali, Stefan si accorse che la potenza totale irradiata da un corpo nero,  $\Psi_{tot}$  (corrispondente all'area al di sotto della curva del potere emissivo), è proporzionale, tramite una costante  $\sigma$ , alla quarta potenza della temperatura, ovvero:

$$\Psi_{tot} = \sigma T^4 \quad (1.3)$$

Fu uno dei più brillanti studenti di Stefan, tale Ludwig Boltzmann, a fornire una giustificazione teorica per tale legge. Basandosi solo su considerazioni di termodinamica ed elettromagnetismo, Boltzmann fu in grado di ricavare proprio l'Eq. (1.3) (che prese dunque il nome di *legge di Stefan-Boltzmann*), determinando per la costante  $\sigma$  (anch'essa divenuta nota col nome di costante di Stefan-Boltzmann) il valore:  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ . Noti i vincoli forniti dalla legge di Stefan-Boltzmann e da quella dello spostamento di Wien, restava da determinare un quadro teorico in grado di predire l'andamento del potere emissivo  $\Psi_\lambda$ . In altre parole, occorre ricavare, dai principi primi di termodinamica ed elettromagnetismo, la forma della  $F(\lambda T)$  che compare nella (1.1).

Purtroppo, dopo i successi di Kirchhoff, Wien, Stefan e Boltzmann, iniziano i problemi. La forma funzionale di  $\Psi_\lambda$ , infatti, non sembrava essere in alcun

modo ricavabile a partire da concetti classici. Nessuna delle previsioni teoriche era infatti in grado di riprodurre correttamente l'intero spettro osservato. Un primo tentativo empirico di ricavare l'espressione di  $\Psi_\lambda$  venne da Wien (nel 1896) che, osservando una certa somiglianza tra lo spettro di corpo nero e la distribuzione delle velocità di Maxwell, suppose che le analogie fossero dovute al fatto che l'emissione di radiazione era in qualche modo legata proprio all'agitazione termica, e quindi alla velocità delle molecole del corpo nero, ricavando una relazione che va sotto il nome di *legge di radiazione di Wien*:

$$\Psi_\lambda = \frac{C}{\lambda^5} e^{-C'/\lambda T} \quad (1.4)$$

Tale funzione, tuttavia, ha dei limiti piuttosto evidenti:

- il processo di emissione ed assorbimento della radiazione in cavità non ha un solido fondamento teorico;
- la funzione interpola in maniera soddisfacente i punti sperimentali nella regione di piccole  $\lambda$ , ma fallisce evidentemente per grandi lunghezze d'onda, sottostimando il potere emissivo rispetto ai valori sperimentali;
- il valore delle costanti  $C$  e  $C'$  non è prevedibile teoricamente e deve necessariamente essere ricavato sperimentalmente.

Lo stesso Planck tentò di dedurre la formula di Wien a partire da ragionamenti sull'entropia del sistema, ma senza alcun successo. L'Eq. (1.2) rimase una buona approssimazione empirica dei dati per piccole lunghezze d'onda e nulla più.

Un tentativo più sistematico venne compiuto da John William Strutt, più usualmente noto come Lord Rayleigh. Egli propose un approccio diverso per ricavare l'espressione di  $\Psi_\lambda$ . Si tratta, comunque, di un approccio di tipo classico, basato sulla possibilità di assorbire ed emettere radiazione in cavità (ad ogni lunghezza d'onda), solo per mezzo di onde elettromagnetiche *stazionarie*. Per onda stazionaria s'intende un'onda che non si propaga lungo una fissata direzione spaziale, ma oscilla soltanto nel tempo. Essa presenterà dunque dei punti in cui è fissa e di ampiezza nulla, detti *nodi*. Nel modello di Rayleigh, i nodi delle onde stazionarie si trovano sempre sulle pareti della cavità. Ogni spostamento di energia all'interno della cavità è vincolato ad avvenire per mezzo di un'onda stazionaria di questo tipo. Su questa base, egli associò ogni onda a un oscillatore armonico unidimensionale (l'oscillazione armonica è legata all'oscillazione del campo elettrico). In questo modo, la *densità spettrale d'energia*  $\rho$ , ovvero l'energia per unità di volume in un intervallo infinitesimo di lunghezza d'onda, sarà ottenuta come prodotto tra

la densità di volume  $n_\lambda$  dei modi di lunghezza d'onda compresa tra  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$  e l'energia media  $\langle \varepsilon_\lambda \rangle$  di un oscillatore, ovvero:

$$\rho = n_\lambda \langle \varepsilon_\lambda \rangle. \quad (1.5)$$

Utilizzando il principio di *equipartizione dell'energia*, secondo il quale, all'equilibrio e a temperatura fissata, l'energia cinetica media per grado di libertà di un oscillatore è, indipendentemente dalla sua frequenza, uguale a  $kT/2$  (con  $k$  costante di Boltzmann), e tenendo conto che l'energia potenziale media è uguale a quella cinetica<sup>7</sup>, si ha:

$$\langle \varepsilon_\lambda \rangle = 2 \times \frac{1}{2} kT = kT. \quad (1.6)$$

Per quanto riguarda il numero di *modi*, risulta (vedi Appendice A):

$$n_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}, \quad (1.7)$$

che inserita, insieme alla (1.6), nella (1.5), fornisce la cosiddetta *legge di Rayleigh-Jeans*<sup>8</sup>

$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT. \quad (1.8)$$

Da questa, moltiplicando per la velocità della luce, otteniamo il potere emissivo, i.e.  $\Psi_\lambda = c\rho$ .

Sebbene la (1.8) sia ricavata in maniera rigorosa, a partire da principi primi e basandosi su argomentazioni di fisica classica assolutamente solide, essa risulta in accordo con i valori sperimentali soltanto per valori molto elevati di  $\lambda$ , ovvero piccoli valori della frequenza  $\nu$  (vedi Fig. 1.6). L'inaspettata divergenza della funzione  $\rho(\lambda, T)$  per grandi valori di frequenza della radiazione di corpo nero (ovvero piccole  $\lambda$ ), evidenzia però il fallimento della teoria classica, tanto da essere definita come la "*catastrofe ultravioletta*". Il termine non è esagerato: la legge di Rayleigh-Jeans predice una quantità infinita di energia radiata, risultato chiaramente assurdo.

## 1.2 La rivoluzione di Planck

All'inizio dell'anno 1900, dunque, la situazione è sinteticamente questa: la teoria classica, che si concretizza nella formula di Rayleigh-Jeans, non è in

<sup>7</sup>Questo risultato prende il nome di *teorema del viriale*.

<sup>8</sup>Un errore di calcolo nella derivazione di Rayleigh fu corretto da Sir James Jeans nel 1905.

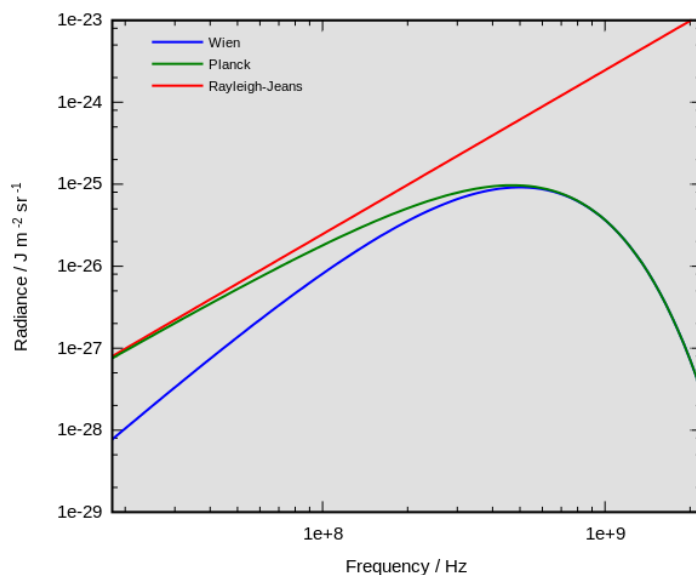


Figura 1.6: Confronto tra le varie predizioni teoriche relative allo spettro in funzione della frequenza di un corpo nero alla temperatura di 8 mK. Per completezza, nella figura è riportata anche la predizione di Planck (vedi avanti), l'unica in accordo con le osservazioni sperimentali.

grado di spiegare la radiazione di corpo nero. La migliore approssimazione disponibile per essa è una formula empirica fornita da Wien che, tuttavia, non ha alcun fondamento teorico. L'impressione generale è che il problema della teoria classica risieda nel calcolo del numero di modi di vibrazione per ogni lunghezza d'onda. Basta infatti osservare la struttura della (1.7) per comprendere che il numero di modi tende a divenire sempre più grande man mano che  $\lambda$  decresce, fino a divergere nel limite  $\lambda \rightarrow 0$ . Questo aspetto, ovviamente, non sfuggì a Max Planck.

Nell'estate del 1900, Ferdinand Kurlbaum e Heinrich Rubens, ottengono delle misurazioni estremamente accurate di alcune distribuzioni spettrali di corpo nero, osservando un netto disaccordo tra i dati sperimentali e le previsioni teoriche<sup>9</sup>. All'ora del tè di domenica 7 ottobre 1900, Rubens e consorte fanno visita a Planck nella sua casa di Berlino. In quell'occasione, Rubens mostra a Planck come le sue ultime misure sperimentali si accordino perfettamente alla legge di Rayleigh-Jeans per grandi valori di lunghezza d'onda, dove, invece, risulta inefficiente la predizione di Wien (cfr. Fig. 1.6). La situazione è

<sup>9</sup>Inizialmente, i dati sperimentali non erano sufficientemente precisi da evidenziare il disaccordo con la predizione di Wien. Solo con le misure di Kurlbaum e Rubens, il problema del corpo nero acquistò la criticità che lo rese famoso.



rovesciata nella regione delle piccole lunghezze d'onda, dove l'accordo è con la legge di Wien, mentre la curva di Rayleigh-Jeans è “catastroficamente” sbagliata. Quando Rubens e la moglie lasciano la casa, Planck si chiude nel suo studio, e in poche ore scopre fortuitamente la legge che lo avrebbe fatto passare alla storia. Senza nessuna apparente motivazione teorica, modificando leggermente la legge di Wien con l'aggiunta di un “meno uno” al denominatore:

$$\Psi_\lambda = \frac{C}{\lambda^5(e^{C'/\lambda T} - 1)} \quad (1.9)$$

si otteneva un accordo perfetto con i dati sperimentali. Tuttavia, nonostante la (1.9) fosse in grado di riprodurre l'andamento delle misure di Rubens in tutto il l'intervallo di frequenze accessibile, essa presentava gli stessi problemi della legge di Wien: era del tutto priva di una derivazione teorica fondata e le costanti  $C$  e  $C'$  dovevano ancora essere valutate empiricamente.

I giorni che seguirono l'incontro con Rubens furono a dir poco estenuanti per Planck. Egli lavorò giorno e notte nel tentativo di dare un fondamento teorico alla sua equazione partendo dai noti principi classici, ma ogni suo sforzo fu assolutamente vano. Il desiderio di motivare la propria intuizione si fece ancora più pressante nel momento in cui Planck si accorse anche che per piccoli valori di lunghezza d'onda la sua equazione di riduceva a quella di Wien, mentre per grandi  $\lambda$  a quella di Rayleigh-Jeans (come mostrato in Appendice B).

Esauriti tutti i possibili approcci teorici (classici) al problema, Planck si rende conto di dover cominciare a guardare “fuori dalle vie battute”. Ragionando sul modello di Rayleigh, Planck intuisce che il problema risiede nel considerare ugualmente possibili tutti i modi di vibrazione degli oscillatori<sup>10</sup> in cavità. Planck matura l'idea che ci sia qualcosa che proibisca i modi ad alta frequenza, evitando la catastrofe ultravioletta.

Nei primi giorni del dicembre 1900, Planck compie quello che egli stesso in seguito definì “un atto disperato”: ipotizza che leggi di natura non siano continue, ma discrete. Egli avanza l'ipotesi che ogni oscillatore nella cavità possa scambiare solo quantitativi di energia che siano un *multiplo intero* di una quantità fondamentale, detta *quanto di energia*, dipendente dalla frequenza  $\nu$ , e pari a:

$$E = h\nu \quad (1.10)$$

---

<sup>10</sup>Per la precisione, a differenza di Rayleigh, che considerava le onde stazionarie scambiate in cavità alla stregua di oscillatori armonici, Planck considera le cariche degli atomi delle pareti della cavità come degli oscillatori armonici, che interagiscono col campo di radiazione. Si può dimostrare che i due approcci sono del tutto equivalenti.

con  $h$  valore costante che passerà alla storia come *costante di Planck*. L'assunto sembra a prima vista solo un artificio matematico che ovvia alla divergenza ad alta frequenza, ma le implicazioni vanno ben oltre la semplice soluzione matematica. L'ipotesi di Planck si rivelerà presto necessaria per spiegare diversi fenomeni non compresi e in molti casi, addirittura predittiva. Prima di affrontare il calcolo dello spettro di Planck, cerchiamo di capire qualitativamente come l'assunzione della discretizzazione dell'energia (o, brevemente la *quantizzazione*) possa influenzare il numero degli oscillatori all'interno della cavità (e nello specifico i modi di più alta frequenza). Secondo la (1.10), un oscillatore di frequenza  $\nu$  può scambiare "pacchetti" di energia pari a  $h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots, nh\nu$ , solo con la radiazione di frequenza  $\nu$ . Ora, se tale frequenza è molto elevata, gli scambi energetici sono consistenti, e dunque l'emissione di una radiazione di quella frequenza comporterebbe un forte squilibrio energetico della cavità (ovvero un flusso netto di energia in una certa direzione). Tale situazione è totalmente inaccettabile, dal momento che un corpo nero è per definizione un corpo *in equilibrio* a una certa temperatura. Per dirla con un'analogia, supponiamo che il corpo nero sia il portafoglio di un comune cittadino italiano. Sarebbe auspicabile, per tale cittadino, avere un portafoglio che sia sempre "in equilibrio", ovvero che registri delle uscite sempre uguali alle entrate<sup>11</sup>. Se associamo i diversi tagli di monete e banconote a oscillatori di frequenza diversa, è chiaro che lo scambio di monete da un euro (o multipli di esso) è estremamente più comune, e meno destabilizzante, di quello di banconote da 500 euro.

È interessante notare che Planck non fece nessuna supposizione sulla reale natura di questo "quanto di energia" (bisognerà aspettare l'avvento della QED<sup>12</sup> per questo); la soluzione di Planck fu inizialmente solo un artificio matematico, e nulla più. Infatti, assunta per l'energia di un oscillatore armonico la seguente espressione:

$$\epsilon_n = n h \nu \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

in equilibrio termico, alla temperatura  $T$ , l'energia media sarà data da:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{-\epsilon_n/(kT)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon_n/(kT)}}. \quad (1.11)$$

Introdotta la *somma di equipartizione*

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_n} \quad \beta = \frac{1}{kT},$$

<sup>11</sup>In verità, sarebbe auspicabile avere degli ingressi maggiori delle uscite, ma lavorate un po' di fantasia...

<sup>12</sup>Acronimo inglese che sta per Elettrodinamica Quantistica.

è facile vedere che la (1.11) può essere scritta come:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{Z} \left( -\frac{dZ}{d\beta} \right) = -\frac{d}{d\beta} \ln Z.$$

Ricordando l'espressione per la somma di una serie geometrica di ragione  $q$  ( $< 1$ )

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},$$

si ha:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h\nu})^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}$$

e, quindi:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= -(1 - e^{-\beta h\nu}) \frac{-h\nu e^{-\beta h\nu}}{(1 - e^{-\beta h\nu})^2} \\ &= h\nu \frac{e^{-\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Si vede, quindi, che, a differenza del caso classico, l'ipotesi di Planck conduce ad un'energia media degli oscillatori che dipende sia da  $T$  che da  $\nu$ . È proprio questa dipendenza dalla frequenza che consente di eliminare la divergenza del numero di oscillatori ad alte frequenze (la celebre catastrofe ultravioletta). Infatti, per avere l'espressione finale della densità spettrale d'energia, sarà sufficiente moltiplicare l'energia media ad una data frequenza di oscillazione per il corrispondente numero di *modi* di oscillazione possibili. Quest'ultimo è dato dal calcolo di Rayleigh-Jeans che, ribadiamolo, pur portando all'assurdo di energia infinita ad alte frequenze, non è in alcun modo sbagliato. Si ottiene, quindi:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^4}{c^4} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}. \quad (1.13)$$

A questo punto qualcosa di molto familiare dovrebbe saltare all'occhio. Infatti, riscrivendo la (1.13) in termini della lunghezza d'onda ( $\nu = c/\lambda$ ), e tenendo conto che  $\Psi_\lambda = c\rho$ , otteniamo:

$$\Psi_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} \quad (1.14)$$

che, posto  $C = 8\pi hc$  e  $C' = hc/k$ , riproduce esattamente l'equazione "fortunata" di Planck (cfr. Eq. (1.9)). Inoltre, partendo dall'Eq. (1.13) e facendone i limiti per  $\lambda$  molto grande e  $\lambda$  molto piccola, si ottengono (cfr. Appendice

B), rispettivamente, la formula di Rayleigh-Jeans (che ben si adatta ai dati nel limite di lunghezze d'onda elevate) e quella di Wien (che è in accordo con le misure per valori di lunghezza d'onda piccole).

Lo spettro di Planck si adatta perfettamente alle misure sperimentali per tutti i valori di lunghezza d'onda e tutte le costanti sono automaticamente determinate. L'assunzione del carattere discreto della Natura sembra funzionare alla perfezione.

Non è difficile immaginare lo sgomento della comunità scientifica nel leggere la relazione che Planck presentò, il 14 dicembre 1900 (data ritenuta da molti come quella della vera nascita della meccanica quantistica), in occasione di una riunione della Società di Fisica di Berlino. Per anni, tutti i più brillanti fisici teorici (e non) rimasero scettici nei confronti della teoria quantistica introdotta da Planck. Essi fallirono ripetutamente nel tentativo di falsificare quella che sembrava essere una mera assunzione formale per la risoluzione matematica del problema di corpo nero. Tra tutti, il più scettico era proprio Planck stesso<sup>13</sup>, che cercò (invano) di trovare dei punti deboli nel suo approccio per il resto della sua esistenza, come evidenziato da una nota nella sua autobiografia: *“Ho provato per moltissimi anni a salvare la fisica dai livelli discontinui dell'energia”*. Fa davvero riflettere la scelta del termine *“salvare la fisica”*. Comprensibilmente, l'assimilazione di una teoria così rivoluzionaria non è affatto facile. Nonostante la difficoltà di comprendere tutte le implicazioni che la negazione della continuità dell'energia avrebbe comportato, già alla fine del primo decennio del XX secolo, tutti concordavano sul fatto che l'ipotesi quantistica fosse necessaria per giungere all'espressione di Planck, che di fatto continuava a resistere a *tutti* i confronti con i risultati sperimentali.

Soltanto una persona comprese il potenziale dei quanti di energia: Albert Einstein. Già nel 1905 (appena cinque anni dopo la scoperta di Planck), l'allora ventiseienne impiegato dell'Ufficio Brevetti di Berna imprese la svolta decisiva per l'affermazione dell'ipotesi quantistica. Egli, infatti, pubblicò un articolo, dal titolo: *“Su di un punto di vista euristico, concernente la produzione e la trasformazione della luce”*, che gli valse l'assegnazione del Premio Nobel per la Fisica nel 1921, nel quale uno degli argomenti trattati (in realtà, solo uno tra i cinque di quell'articolo) era la spiegazione teorica dell'effetto fotoelettrico (altro problema aperto, non giustificabile in chiave classica)<sup>14</sup>. Sulla base dell'ipotesi quantistica, Einstein propose una teoria perfettamente in grado di spiegare tutte le osservazioni sperimentali. Nell'articolo si legge:

<sup>13</sup>Proprio per tale aspetto paradossale, Planck è stato incluso nella categoria dei “rivoluzionari riluttanti”.

<sup>14</sup>Come chiariremo in sezione 2.6, la spiegazione dell'effetto fotoelettrico non richiede la quantizzazione della radiazione incidente, ma solo della materia.

*“La teoria ondulatoria della luce, che fa uso di funzioni spaziali continue, si è verificata ottima per quel che riguarda i fenomeni puramente ottici e sembra veramente insostituibile in questo campo. Tuttavia [...] è pensabile che la teoria della luce, fondata su funzioni spaziali continue, possa entrare in conflitto con l’esperienza, qualora venga applicata ai fenomeni di emissione e trasformazione della luce. Infatti mi sembra che le osservazioni compiutesi sulla radiazione di corpo nero, la fotoluminescenza, l’emissioni di raggi catodici tramite luce ultravioletta e altri gruppi di fenomeni relativi all’emissione ovvero la trasformazione di luce, risultino molto più comprensibili se vengono considerate in base all’ipotesi che l’energia sia distribuita nello spazio in modo discontinuo.”*

Le equazioni proposte da Einstein fornivano anche un modo alternativo per ottenere il valore della costante di Planck, assolutamente compatibile con i valori ricavati da Planck dall’analisi dei dati sperimentali (dal confronto con la costante di Stefan-Boltzmann). Ad oggi, la costante di Planck è nota con grande precisione, e ha il valore:

$$h = 6,62606957(29) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

L’articolo di Einstein suscitò grande interesse, ma ricevette dure critiche, anche dallo stesso Planck che non decideva ad arrendersi al successo della sua teoria. In un primo momento Planck non esitò a criticare Einstein per aver “troppo superato” i limiti della sua teoria, senza cercare alcun contatto con la dinamica classica. Solo successivamente Planck dovette ammettere che: *“Le sue speculazioni l’avevano spinto troppo in là talvolta, ad esempio per quanto riguarda la sua ipotesi dei fotoni, tuttavia non si deve dare troppa importanza a questo fatto. Infatti, le scienze esatte progredirebbero ben poco se nessuno osasse correre dei rischi.”* In definitiva, la spiegazione dell’effetto fotoelettrico aprì la strada allo sviluppo della teoria quantistica che, già nel 1927, anno in cui si svolse la celebre conferenza di Solvay, può considerarsi completa. In Fig. 1.7 è riportata la foto ufficiale di tutti i partecipanti alla conferenza. Praticamente *ognuno* di loro è passato alla storia per aver dato un contributo fondamentale alla costruzione della meccanica quantistica (tra i più famosi si riconoscono ad esempio: Planck, Einstein, Pauli, Dirac, Heisenberg, Schrödinger, Bohr, De Broglie, Curie e Lorentz).

Dunque, nel 1927, i problemi cruciali della crisi della meccanica classica sono stati tutti risolti grazie all’ipotesi di Planck: spettro di corpo nero, effetto fotoelettrico e spettri atomici<sup>15</sup> sono perfettamente spiegati grazie all’introduzione della quantizzazione dell’energia. Planck dovette dunque arrendersi

---

<sup>15</sup>Grazie alla quantizzazione del momento angolare orbitale, Bohr riuscì a fornire un modello atomico soddisfacente, in grado di spiegare sia la stabilità degli atomi, che gli spettri di emissione e assorbimento dei gas (vedi capitolo 2).

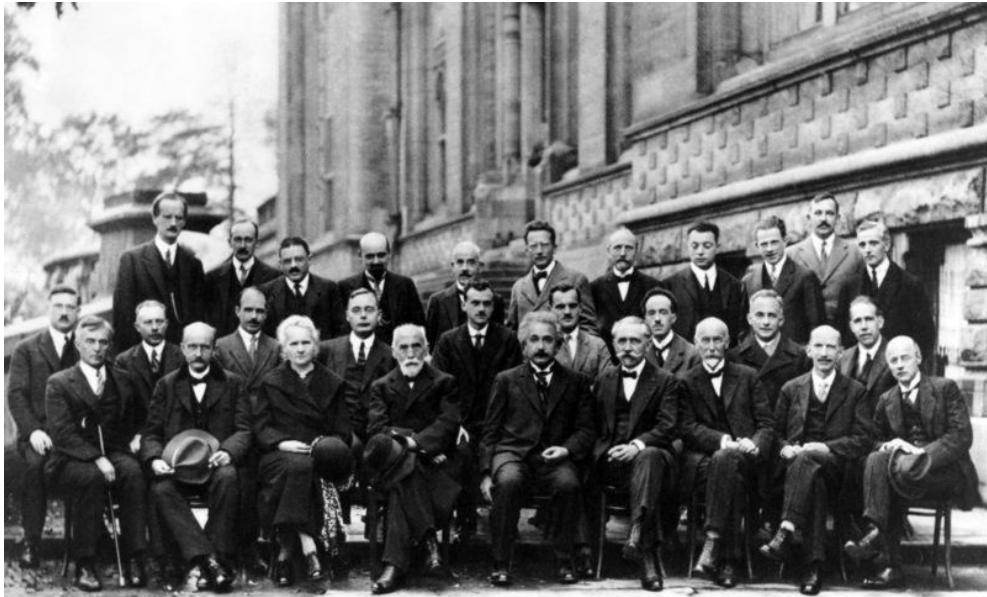


Figura 1.7: Foto di gruppo dei partecipanti alla conferenza Solvay del 1927.

a se stesso. L'ipotesi quantistica era un'ipotesi valida. La sua costante, divenuta tra le fondamentali della fisica (al pari della velocità della luce e della costante di gravitazione universale), assunse un ruolo cruciale nello sviluppo della teoria: essa determina sia il quanto fondamentale di radiazione, sia la scala di grandezza a cui i fenomeni naturali diventano “*quantistici*”.

## Appendice A

Consideriamo una scatola cubica di spigolo  $L$ . Assumiamo che essa non contenga cariche e correnti elettriche e che la superficie interna delle sue pareti sia perfettamente riflettente. Si può dimostrare che il campo di radiazione all'interno della scatola ha la seguente dipendenza funzionale dalla coordinata spaziale  $\vec{r} = (x, y, z)$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) \propto \sin(\vec{k} \cdot \vec{r})$$

dove  $\vec{k}$  è il vettore d'onda, per il quale risulta:

$$k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Otterremo un campo stazionario imponendo che esso si annulli sulle pareti della scatola, ovvero che risulti:

$$\sin(k_x x) = \sin(k_y y) = \sin(k_z z) = 0$$

da cui si ottiene:

$$k_x = n_x \frac{\pi}{L}, \quad k_y = n_y \frac{\pi}{L}, \quad k_z = n_z \frac{\pi}{L}, \quad (1.15)$$

con  $n_{x,y,z}$  interi positivi. Ogni possibile soluzione stazionaria, risulta, quindi, individuata dalla tripletta  $(n_x, n_y, n_z)$ , ovvero sarà rappresentata da un "nodo" di un reticolo tridimensionale. Introdotta una distanza in questo particolare spazio:

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2},$$

il numero di punti all'interno dello strato sferico compreso tra  $n$  e  $n + dn$ , sarà dato da<sup>16</sup>:

$$4\pi n^2 dn.$$

Poiché  $n_x, n_y, n_z > 0$ , occorre limitarsi ad un solo ottante dello strato, per cui si ha:

$$d\mathcal{N} = \frac{\pi}{2} n^2 dn. \quad (1.16)$$

Tenendo conto della (1.15), risulta inoltre:

$$n = \frac{L}{\pi} k$$

---

<sup>16</sup>Lo spazio è discreto ma applichiamo la formula valida nel caso di uno spazio tridimensionale continuo. La differenza è trascurabile per  $n$  sufficientemente grande.

per cui:

$$dn = \frac{L}{\pi} dk$$

e, quindi, la (1.16) può essere riscritta come:

$$d\mathcal{N} = \frac{\pi}{2} \frac{L^2}{\pi^2} k^2 \frac{L}{\pi} dk = \frac{L^3}{2\pi^2} k^2 dk.$$

Infine, tenendo conto della relazione  $k = 2\pi/\lambda$  e delle due diverse direzioni di polarizzazione associate a ogni un'onda elettromagnetica, abbiamo:

$$d\mathcal{N} = \frac{L^3}{2\pi^2} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{2\pi}{\lambda^2} (2 d\lambda) = L^3 \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

e, quindi ( $V = L^3$ ):

$$n_\lambda = \frac{1}{V} \frac{d\mathcal{N}}{d\lambda} = \frac{8\pi}{\lambda^4}.$$



## Appendice B

Consideriamo la distribuzione di Planck scritta in termini della lunghezza d'onda  $\lambda$  (cfr. (1.13)):

$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}. \quad (1.17)$$

Da questa è possibile ricavare le leggi di Wien e Rayleigh-Jeans semplicemente calcolando il limite di questa funzione al tendere della lunghezza d'onda a zero e infinito, rispettivamente. Indicata con  $\lambda_{\text{peak}}$  la lunghezza d'onda per il quale lo spettro consegue il proprio massimo, risulta:

- Limite per piccole lunghezze d'onda ( $\lambda \ll \lambda_{\text{peak}}$ )  
Se  $\lambda$  è molto piccolo, allora  $e^{hc/\lambda kT} \gg 1$ . Quindi, il denominatore dell'Eq. (1.17) è approssimato dal termine esponenziale, per cui:

$$\rho(\lambda, T) \approx \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hc/(\lambda kT)}} = C e^{-C'/(\lambda T)} \quad (1.18)$$

ovvero la legge di Wien (con le costanti  $C$  e  $C'$  determinate).

- Limite per lunghezze d'onda grandi ( $\lambda \gg \lambda_{\text{peak}}$ )  
Se  $\lambda$  è molto grande, allora l'esponente di  $e^{hc/\lambda kT}$  è molto piccolo. In tali condizione, l'esponenziale può essere sviluppato in serie di Taylor:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Se ci limitiamo a considerare solo il primo ordine (ovvero si approssima  $e^x$  con  $1 + x$ ), il denominatore di Eq. (1.17) è approssimato da:

$$1 + \frac{hc}{\lambda kT} - 1 = \frac{hc}{\lambda kT},$$

per cui, si ha:

$$\rho(\lambda, T) \approx \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{hc/(\lambda kT)} = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT$$

ovvero, esattamente la legge di Rayleigh-Jeans.



# Capitolo 2

## Dualità onda-particella

I concetti di onda e particella sono i concetti su cui è basata la descrizione classica del mondo fisico. Il termine *particella* indica una piccola concentrazione spaziale di materia, mentre con *onda* s'intende qualcosa di diverso: una distribuzione d'energia diffusa che riempie lo spazio attraverso cui essa si propaga. L'unico punto di contatto tra i due concetti è costituito dalla capacità di entrambe queste entità di trasportare (trasmettere) energia.

### 2.1 L'esperimento delle due fenditure ...

Nel seguito esamineremo in dettaglio l'esperimento delle due fenditure di Young - uno degli esperimenti cruciali della Fisica - realizzato con oggetti di natura diversa: proiettili (ovvero, particelle), onde ed elettroni.

#### 2.1.1 ... con i proiettili

Nella sua configurazione ideale, l'esperimento risulta composto di tre elementi (cfr Fig. 2.1):

- una *sorgente*: una mitragliatrice oscillante che spara proiettili tutti con la stessa velocità, ma lungo direzioni casuali all'interno di un cono di apertura piuttosto grande;
- uno *schermo*: di fronte alla mitragliatrice è posta una lastra corazzata su cui sono praticati due fenditure di dimensione appena sufficiente a lasciar passare un proiettile;
- un *rivelatore*: dietro lo schermo sono posizionate una serie di scatole contenenti sabbia entro cui un proiettile viene completamente fermato.

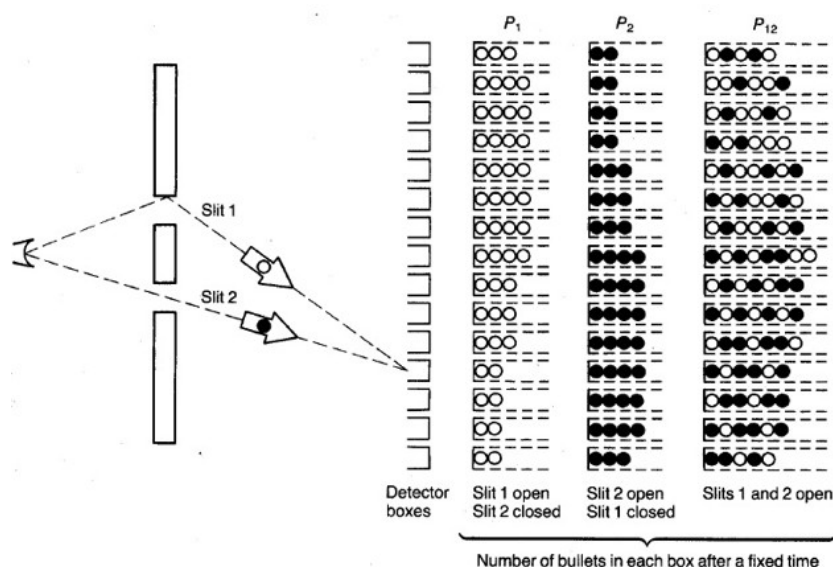


Figura 2.1: L'esperimento delle due fenditure eseguito con i proiettili.

La mitragliatrice spara con un ritmo costante e possiamo contare quanti proiettili giungono in una certa scatola, ovvero in una certa posizione  $x$  lungo la parete su cui sono disposte le scatole, in un fissato intervallo di tempo. I proiettili che oltrepassano la lastra possono andare dritti o rimbalzare su uno degli spigoli dei due fori, ma sempre terminano la loro corsa in una delle scatole.

L'esperimento è ideale, per cui facciamo l'ipotesi che i proiettili siano indistruttibili: non possiamo mai trovare frammenti di un proiettile in una delle scatole; inoltre, non accade mai che due proiettili giungano al rivelatore nello stesso istante (basta regolare il ritmo della mitragliatrice). Quindi, abbiamo una sola mitragliatrice e ciascun proiettile è un singolo "blocco".

Se lasciamo che la mitragliatrice continui a sparare per un certo tempo - ad esempio, un'ora - e poi contiamo i proiettili raccolti in ogni scatola, possiamo misurare la probabilità d'arrivo dei proiettili in funzione della posizione  $x$  della scatola lungo il rivelatore: è il rapporto tra il numero di proiettili nella scatola e il numero totale di quelli sparati. Indichiamo questa funzione di  $x$  con  $P_{12}$  (vedi Fig. 2.1), per indicare che essa è stata ottenuta con entrambe le fenditure aperte. Può sorprendere che questa funzione sia massima a  $x = 0$ , ovvero a metà strada tra i due fori. Questo risultato si può comprendere ripetendo l'esperimento avendo cura di lasciare aperta una sola fenditura: prima quella 1, poi la 2. In questo caso otteniamo, rispettivamente, la distribuzione

$P_1$  e quella  $P_2$  (vedi Fig. 2.1). Si vede chiaramente che risulta

$$P_{12} = P_1 + P_2.$$

### 2.1.2 ... con le onde

Questo caso può essere illustrato utilizzando i due fenomeni ondulatori a noi più familiari: le onde d'acqua e la luce. Cominceremo illustrando il caso delle onde d'acqua, per le quali abbiamo:

- *sorgente*: un'asta motorizzata che produce onde piane in una piscina poco profonda;
- *schermo*: una parete con due fori;
- *rivelatore*: una catena di piccole boe che, seguendo il moto ondoso, ne forniscono una misura dell'altezza<sup>1</sup>.

Le onde si allontanano dalla sorgente raggiungono lo schermo, oltre il quale le onde si dipartono da ciascuna fenditura e giungono al rivelatore. L'energia dell'onda emessa dalla sorgente è distribuita su tutto il rivelatore. La prima cosa da osservare è che l'ampiezza del moto ondoso può assumere qualsiasi valore: se l'asta si muove molto poco, vediamo le boe muoversi appena; quando l'asta prende a muoversi in modo più sostenuto, le boe fanno lo stesso. Non si può dire che l'intensità dell'onda abbia una struttura in qualche modo a "blocchi".

Supponiamo ora che il nostro rivelatore sia in grado di misurare l'intensità, ovvero l'energia<sup>2</sup>, per i diversi valori della coordinata  $x$  (mantenendo fissata l'ampiezza del moto dell'asta). Otteniamo la curva indicata con  $I_{12}$  in Fig. 2.2, nella quale sono anche riportate le funzioni  $I_1$  e  $I_2$  ottenute lasciando aperta la sola fenditura 1 o 2, rispettivamente. Il risultato fondamentale, completamente diverso da quello ottenuto con i proiettili, è che ora:

$$I_{12} \neq I_1 + I_2,$$

ovvero, abbiamo il fenomeno dell'**interferenza**. Contrariamente a quanto avviene per i proiettili, la figura nel caso di entrambe le fenditure aperte non è la semplice somma di quelle ottenute con una sola fenditura aperta.

---

<sup>1</sup>È bene tener presente, qualora si voglia realizzare l'esperimento, che oltre il rivelatore, il bordo della piscina (in realtà, tutto il perimetro) deve essere ricoperto da una striscia di materiale elastico che agisce da assorbitore e impedisce che si produca la riflessione delle onde che s'infrangono su di esso.

<sup>2</sup>Ricordiamo che l'intensità di un'onda è data dal modulo quadro dell'ampiezza.

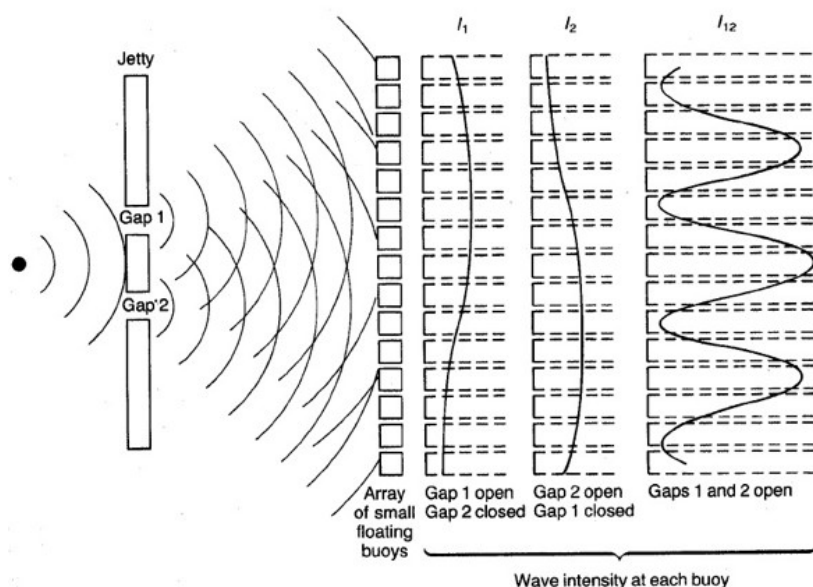


Figura 2.2: L'esperimento delle due fenditure eseguito con l'acqua.

Questo risultato si comprende immediatamente se osserviamo che, in questo caso, sono le ampiezze  $A_1$  e  $A_2$  delle onde che si dipartono dalle due fenditure a sommarsi nei vari punti del rivelatore, ovvero, l'ampiezza totale è data da  $A_{12} = A_1 + A_2$ . Adottando per tali ampiezze l'usuale rappresentazione complessa (i.e., un modulo e una fase), l'energia totale si otterrà come modulo quadro di  $A_{12}$ . ovvero:

$$\begin{aligned} I_{12} &\propto |A_{12}|^2 = |A_1 + A_2|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + (A_1 A_2^* + A_1^* A_2) \\ &\propto I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re}(A_1 A_2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

È il termine legato alla parte reale del prodotto delle ampiezze delle singole onde che, variando con la coordinata  $x$  lungo il rivelatore, produce l'andamento oscillante di  $I_{12}$  mostrato in Fig. 2.2.

È opportuno ricordare che affinché due onde interferiscano, oltre ad avere la stessa frequenza, esse devono essere caratterizzate da una fase relativa che varia in modo non casuale. Poiché è impossibile assicurare il rispetto di tali condizioni nel caso di due sorgenti indipendenti, l'unico modo per generare interferenza consiste nel "duplicare" la sorgente: ecco il motivo delle due fenditure.

Nel caso della luce, invece del dispositivo sperimentale finora utilizzato, possiamo considerare un apparato equivalente ma più raffinato e che, per l'impat-

to che ha avuto sull'evoluzione della Fisica, meriterebbe una dispensa tutta per sé: l'interferometro di Michelson-Morley<sup>3</sup>. In questo apparato (Fig. 2.3) un fascio di luce è diretto su uno specchio semiargentato (beam-splitter), il quale è realizzato in modo da riflettere metà della luce che lo colpisce e lasciar passare l'altra metà. I due fasci luminosi così generati (ancora una duplicazione della sorgente) seguono cammini perpendicolari tra loro, al termine dei quali ciascuno di essi raggiunge uno specchio perfettamente riflettente dal quale è reindirizzato verso il beam-splitter, dove, a secondo della differenza di fase con cui essi vi giungono, si otterrà un diverso valore per il termine d'interferenza nella (2.1).

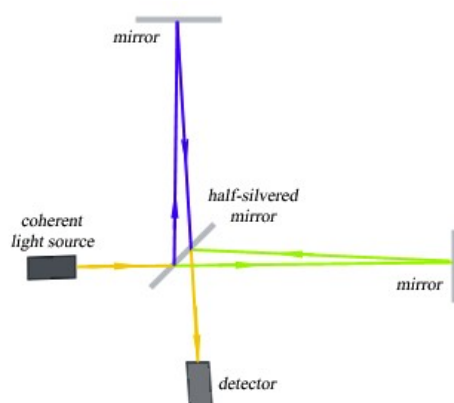


Figura 2.3: Schema di principio dell'interferometro di Michelson-Morley.

### 2.1.3 ... con gli elettroni

In questo caso abbiamo:

- *sorgente*: un cannone elettronico, ovvero un filo di tungsteno riscaldato elettricamente all'interno di un involucro metallico a tensione positiva rispetto al filo; gli elettroni emessi dal filo vengono accelerati verso le pareti dell'involucro sul quale è praticato un foro che consente ad alcuni di essi di uscire (con, approssimativamente, la stessa energia);
- *schermo*: una sottile placca metallica con due fori;

<sup>3</sup>Il nome deriva dai due fisici che negli anni compresi tra il 1881 e il 1887 utilizzarono questo apparato ottico per mostrare che l'etere luminifero non esiste.

- *rivelatore*: uno schermo su cui è depositato un sottile strato di fosforo che produce un breve impulso luminoso ogni volta che è colpito da un elettrone (come nel caso dei vecchi televisori a raggi catodici: lì il fosforo era il solfuro di zinco).

Ci aspetteremmo di registrare sullo schermo la stessa figura vista nel caso dei proiettili, vero? Invece, per incredibile che possa sembrare, osserviamo la figura d'interferenza tipica delle onde! È certamente un risultato sorprendente e lo diviene ancor di più se lo analizziamo in dettaglio.

La prima cosa da dire è che gli elettroni arrivano sullo schermo singolarmente, in granuli individuali della stessa taglia - solo in un posto a un certo istante -, come nel caso dei proiettili. Di ciò ci si può convincere facilmente. Se diminuiamo la tensione del filo in modo da avere pochi elettroni all'interno dell'apparato, dovrebbe essere facile osservare sullo schermo dei lampi separati e tutti della stessa intensità: non osserviamo mai lampi di intensità metà<sup>4</sup>.

Se gli elettroni sono dei granuli siamo portati a pensare che ciascuno di essi sia passato per il foro 1 o quello 2. Per verificare tale osservazione, ripetiamo l'esperimento lasciando prima aperto il solo foro 1 e poi il solo foro 2. Le distribuzioni ottenute le indichiamo, rispettivamente, con  $P_1$  e  $P_2$  (cfr. Fig. 2.4). La distribuzione  $P_{12}$  ottenuta con i due fori aperti non è certo la somma di  $P_1$  e  $P_2$ : c'è *interferenza*! Ma da dove viene fuori questa interferenza? Nel caso delle onde d'acqua e della luce, l'interferenza nasce dalla sovrapposizione delle onde provenienti da entrambe le fenditure. In altre parole, l'onda interferisce con se stessa. Forse gli elettroni si dividono a metà e ciascuna di queste metà attraversa un foro diverso? No, l'abbiamo visto prima: gli elettroni arrivano tutti interi allo schermo.

Forse gli elettroni seguono un percorso complicato: qualcuno passa prima per il foro 1 e, poi, anche per quello 2, per cui chiudendo quest'ultimo abbiamo alterato la probabilità d'arrivo sullo schermo di tutti quelli che avevano attraversato il foro 1 ... Attenzione, però: vi sono alcuni punti dello schermo su cui arrivano pochi elettroni quando sono aperte entrambe le fenditure, ma che rivelano, invece, molti elettroni quando chiudiamo uno dei due fori: la chiusura di un foro aumenta il numero di elettroni provenienti dall'altro! Com'è possibile?

---

<sup>4</sup>L'osservazione può essere resa più quantitativa sostituendo lo schermo con dei rivelatori per elettroni, ad esempio CCD, che, colpiti da un elettrone, producono un impulso di corrente di ampiezza e durata fissata. Dalla lettura della corrente generata da questi rivelatori si osserverebbe che essa è costituita da una successione di impulsi di uguale forma.



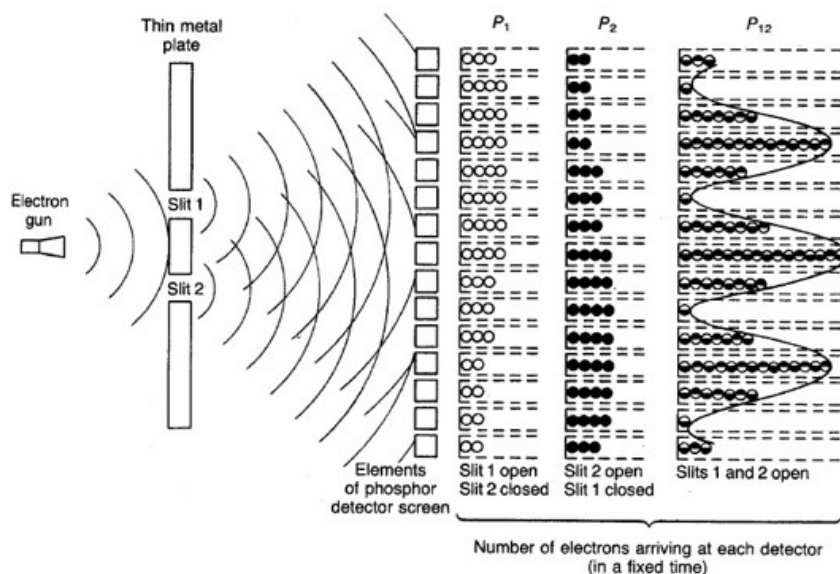


Figura 2.4: L'esperienza delle due fenditure eseguito con gli elettroni.

Ma, forse, questo risultato può essere spiegato in modo relativamente semplice. Forse all'interno dell'apparato ci sono tantissimi elettroni, e si sviluppa un sorta "ingorgo". Supponiamo che ciascun elettrone sia effettivamente una particella indivisibile che passa attraverso una e una sola fenditura, ma che dopo averlo fatto ogni elettrone collide con quelli che hanno attraversato l'altra fenditura. Se questo fosse il caso, è evidente che la figura sul rivelatore cambierebbe sostanzialmente a seconda se siano aperte entrambe le fenditure o solo una di esse. Ma questa ipotesi può essere verificata facilmente facendo in modo che l'ingorgo non si produca, ovvero diminuendo drasticamente l'intensità della sorgente di elettroni. Ciò è stato realizzato in un bellissimo esperimento da A. Tonomura e collaboratori nel 1989. L'apparato sperimentale utilizzato è descritto in Fig. 2.5. Abbassando l'intensità della sorgente, gli sperimentatori hanno fatto in modo che l'apparato fosse attraversato da un solo elettrone per volta. Specificatamente, essi hanno fatto regolare il flusso  $f$  di elettroni a circa 1000 al secondo. Ad una tensione di 50 kV, gli elettroni acquisiscono una velocità  $v$  di circa  $10^8$  m/s; assumendo che siano emessi in modo pressochè uniforme, la loro separazione sarà:

$$d = \frac{v}{f} = \frac{10^8}{10^3} = 10^5 \text{ m} = 100 \text{ km},$$

In queste condizioni non è possibile l'instaurarsi di un ingorgo. Malgrado ciò, come mostrato in Fig. 2.6 il risultato non cambia: l'elettrone "si accorge" se

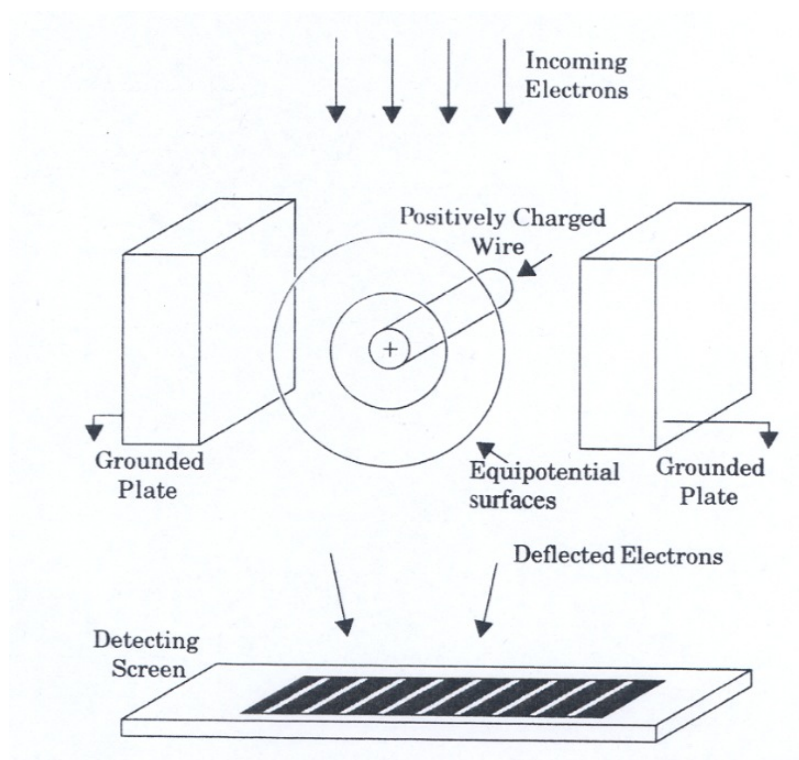


Figura 2.5: Apparato sperimentale utilizzato nell'esperimento di Tonomura e collaboratori.

è aperta una sola fenditura o entrambe.

Non c'è nulla da fare. È come se gli elettroni - ogni singolo elettrone, dal momento che l'apparato sperimentale è attraversato da un solo elettrone per volta - partissero dal cannone e arrivassero al rivelatore come particelle, ma percorressero lo spazio tra loro comportandosi come onde, ovvero *attraversando contemporaneamente entrambe le fenditure!* Siamo al colmo del paradosso. L'elettrone è una particella e con ciò intendiamo qualcosa che è collocata in un particolare punto dello spazio: può essere "qui" o "là", mai in due posti nello stesso istante. Ma non è questo che dice l'esperimento di Tonomura e collaboratori.

Solo gli elettroni, tra le particelle, hanno questo comportamento ondulatorio? No. Negli anni l'esperimento delle due fenditure è stato ripetuto utilizzando anche sorgenti di particelle diverse: neutroni, atomi di elio, fullerene ..., con gli stessi risultati.

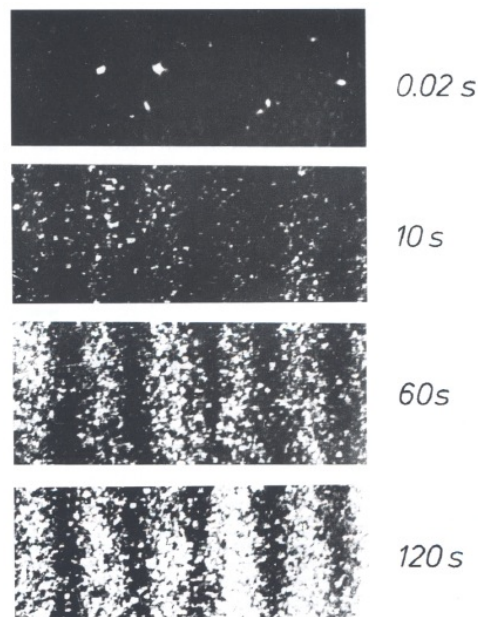


Figura 2.6: Immagine prodotta nell'esperimento di Tonomura e collaboratori.

## 2.2 Osservando gli elettroni

È possibile capire per quale foro passa l'elettrone?

Ritorniamo all'esperimento delle due fenditure e aggiungiamo dietro lo schermo, a metà tra i due fori, una sorgente di luce molto intensa, come in Fig. 2.7. È un fatto sperimentale che le cariche elettriche diffondono la luce, per cui possiamo immaginare che un elettrone che ha oltrepassato lo schermo diffonda della luce verso dei rivelatori posti ai lati dello schermo. Ad esempio, se l'elettrone passa attraverso il foro 2 (cfr. Fig. 2.7) dovremmo osservare un lampo proveniente dalle sue vicinanze. Per un elettrone che passa attraverso il foro 1, ci aspetteremmo, invece, di osservare un lampo nelle vicinanze del foro 1.

Se facciamo l'esperimento, cosa vediamo? Innanzitutto non vediamo mai due lampi (di intensità dimezzata) simultaneamente: il lampo proviene sempre o dalle vicinanze del foro 1 o di quello 2, mai da entrambi. Questo significa che gli elettroni passano attraverso un solo foro: dall'1 o dal 2. Se registriamo le posizioni d'arrivo sul rivelatore di questi due gruppi di elettroni otteniamo le distribuzioni riportate in figura, che indicheremo nel seguito con  $P'_1$  e  $P'_2$ , rispettivamente. La distribuzione  $P'_1$  è molto simile a quella  $P_1$  ottenuta in precedenza quando avevamo chiuso il foro 2;  $P'_2$  è molto simile alla distri-

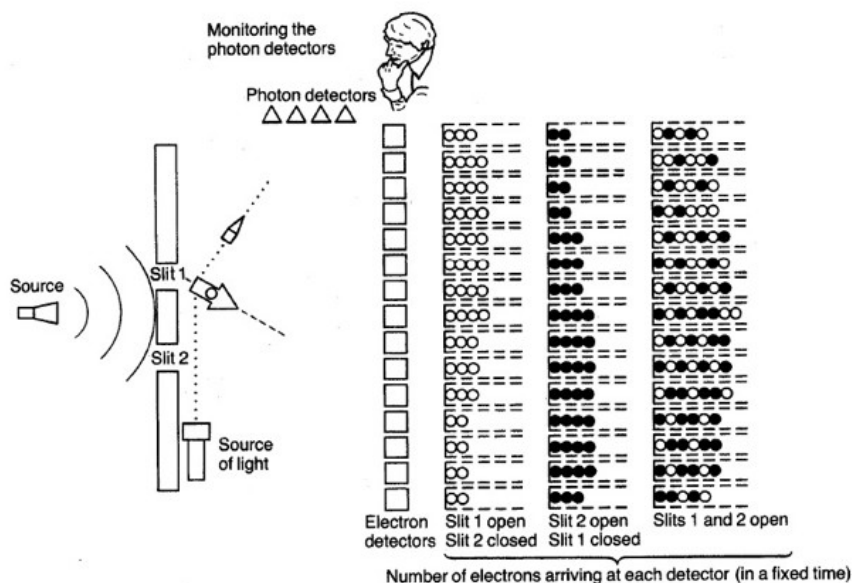


Figura 2.7: Esperimento delle due fenditure con l'aggiunta di una sorgente di luce.

buzione  $P_2$  ottenuta chiudendo il foro 1. Nulla di paradossale come passare attraverso entrambe i fori: quando li osserviamo, gli elettroni si comportano come i proiettili. Quelli che arrivano allo schermo passando attraverso il foro 1 sono distribuiti allo stesso modo indipendentemente dalla condizione (aperto o chiuso) del foro 2.

Se in queste condizioni - con la luce accesa - volessimo sapere la distribuzione totale degli elettroni sullo schermo, indipendentemente dal percorso seguito, basterà sommare  $P'_1$  e  $P'_2$ , ovvero:

$$P'_{12} = P'_1 + P'_2$$

che è diversa dalla curva  $P_{12}$  riportata in Fig. 2.4: è scomparsa l'interferenza! E se adesso spegniamo la luce? Ritroviamo  $P_{12}$ , ovvero la curva d'interferenza. Questo significa inequivocabilmente che la distribuzione degli elettroni sullo schermo quando li osserviamo è differente da quella che otteniamo quando non li osserviamo.

Questa capacità di "interferire con se stesso" di un oggetto che ogni volta che cerchiamo di rivelare ci appare, invece, come una particella rappresenta la prima chiara indicazione della carica rivoluzionaria della teoria che, con le parole di Einstein, "... richiede di trovare una nuova base concettuale per la fisica". È nello sforzo di fondare questa nuova base concettuale che i

fisici hanno coniato il termine **dualità onda-particella** per spiegare questo paradosso. Con tale espressione s'intende che i sistemi quantistici in alcune circostanze - quando vengono rivelati - si comportano come particelle, mentre in altre - quando si propagano indisturbati - come onde.

## 2.3 Onde di materia

Il comportamento ondulatorio degli elettroni fu dimostrato in modo convincente nel 1927 da Davisson e Germer negli USA e da G. P. Thomson in Scozia<sup>5</sup>, ma l'idea che gli oggetti a cui ci riferiamo come particelle dovessero esibire un comportamento ondulatorio era stata proposta tre anni prima. Nel 1924 il fisico francese Louis de Broglie, nella sua tesi di dottorato, elaborò l'ipotesi che ogni particella si propagasse “a cavallo” di un'onda “pilota” di lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2.2)$$

dove  $p$  è l'impulso della particella (il prodotto della massa per la velocità) ed  $h$  è la costante di Planck. Questa formula cattura l'essenza del comportamento schizofrenico degli elettroni in quanto stabilisce un legame tra una quantità caratteristica di un'onda,  $\lambda$ , e quella relativa ad una particella,  $p$ , ma non dice come rappresentare tale legame: nulla ci aiuta a immaginare come sia possibile che uno stesso oggetto sia al contempo un'onda e una particella.

Al tempo in cui de Broglie avanzò la sua ipotesi, nessuna evidenza sperimentale la supportava. La commissione d'esame a Parigi non sapeva se accettare o meno la tesi di dottorato. Il presidente della commissione, l'eminente fisico Paul Langevin, era, per dirla con le parole di de Broglie, “... *un poco sbalordito dalla novità dell'idea*”, ma fu lungimirante e inviò una copia della tesi ad Einstein, il quale la giudicò come “*il primo flebile raggio di luce nell'oscurità degli enigmi*” della Fisica del tempo. Ovviamente, la commissione conferì il dottorato a de Broglie, il quale, cinque anni dopo, fu onorato anche con il Nobel.

La formula di de Broglie ci aiuta anche a rispondere a una domanda che si propone naturalmente dopo un'attenta riflessione sui risultati dell'esperimento delle due fenditure con gli elettroni: se tutte le “particelle” esibiscono un comportamento ondulatorio, perché questo non emerge con i proiettili,

---

<sup>5</sup>Per tale risultato, nel 1933, a Davisson e Thompson fu assegnato il Nobel. A tale riguardo, due osservazioni: 1) perché non fu assegnato anche a Germer? 2) George Paget Thompson era figlio di Joseph John Thompson che 31 anni prima aveva ricevuto lo stesso premio per aver mostrato, con alcuni esperimenti di radioattività, che l'elettrone è una particella.

le palle da biliardo, le automobili, ... La risposta è nel piccolo valore della costante di Planck:

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Proviamo a calcolare, quindi, le lunghezze d'onda di de Broglie di alcuni oggetti:

1. una Ferrari ( $m = 600 \text{ kg}$ ) che si muove con  $v = 300 \text{ km/h}$  (=

$$\lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{600 \times (300 \times 10^3 / 3600)} \simeq 1.3 \times 10^{-35} \text{ m};$$

2. un atomo d'idrogeno che si muove con la velocità che compete al suo moto termico a temperatura ambiente (300 K)

$$m_{\text{H}} \simeq m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad kT \simeq 4 \times 10^{-21} \text{ J}$$

per cui:

$$v = \sqrt{\frac{2kT}{m_p}} \simeq 2.2 \text{ km/s} \quad \implies \quad \lambda \simeq 1.8 \times 10^{-10} \text{ m};$$

3. elettrone all'interno dell'atomo d'idrogeno

$$m_e \simeq 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad v \simeq 3 \times 10^3 \text{ km/s}$$

per cui:

$$\lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^6)} \simeq 2.4 \times 10^{-10} \text{ m}.$$

Da tali esempi dovrebbe risultare chiaro che, poiché la lunghezza d'onda decresce al crescere della massa, tutte le particelle del mondo "classico" risultano, di fatto, associate a onde la cui lunghezza d'onda è estremamente piccola, sicuramente ben al disotto della scala di distanze caratteristica dei processi che li coinvolgono.

Questa osservazione consente anche di spiegare perché nell'esperimento delle due fenditure con i proiettili descritto in sezione 2.1.1 non si vede alcuna figura d'interferenza. In questo caso per i proiettili possiamo assumere  $m = 20 \text{ g}$  e  $v = 1000 \text{ km/h}$ , per cui:

$$\lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{(20 \times 10^{-3}) \times (1000 \times 10^3 / 3600)} \simeq 1.2 \times 10^{-34} \text{ m}.$$

Poiché la struttura della figura ottenuta sullo schermo è controllata dal rapporto tra la distanza  $d$  (qualche centimetro) tra le fenditure e la lunghezza d'onda di de Broglie, le frange d'interferenza risultano molto sottili e fitte, talmente fitte che sarà impossibile evidenziarle con un rivelatore di dimensioni finite. Quello che si osserva, quindi, è solo una sorta di media, che è la figura classica (cfr. Fig. 2.8)

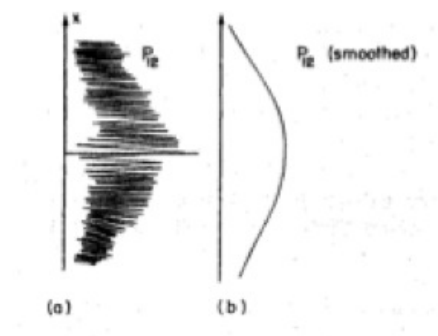


Figura 2.8: Esperimento delle due fenditure con i proiettili. Nella parte (a) è riportata l'immagine sullo schermo calcolata con la meccanica quantistica. Le rapide oscillazioni sono una rappresentazione della figura d'interferenza che si ottiene per lunghezze d'onda molto piccole. Ogni rivelatore fisicamente realizzabile, tuttavia, media le diverse oscillazioni di modo che la misura riproduce la curva continua riportata nella parte (b).

## 2.4 Atomo di Bohr

Tra la fine dell'800 e l'inizio del secolo successivo, una serie di investigazioni sperimentali, le più importanti quelle di Rutherford, avevano portato a concepire l'atomo come una sorta di sistema planetario, composto da un nucleo elettricamente positivo nel quale è concentrata quasi tutta la massa atomica, attorno al quale ruotano elettroni in numero sufficiente a neutralizzare la carica positiva del nucleo. In questa metafora planetaria, il ruolo dell'attrazione gravitazionale tra il sole e i pianeti è sostituita da quella coulombiana tra nucleo ed elettroni.

Questa concezione dell'atomo, però, risulta insostenibile nell'ambito della fisica classica per vari motivi. Innanzitutto, risulta impossibile spiegare la costanza delle proprietà degli atomi. In un sistema a molti corpi quale quello "planetario", le orbite dei singoli componenti dipendono in modo cruciale dalle condizioni iniziali, ovvero modalità di "assemblaggio" diverse di un

sistema di questo tipo determinano strutture diverse per il sistema stesso. Nella realtà, invece, osserviamo che tutti gli atomi di uno stesso elemento esibiscono esattamente le stesse proprietà fisiche indipendentemente dalle condizioni di preparazione e dalle trasformazioni che essi possono aver subito. Queste proprietà, però, cambiano radicalmente quando si passa da un atomo a quello con un elettrone in più o meno. Ad esempio, un gas nobile risulta chimicamente inerte; basta, però, togliergli un elettrone, e un protone e qualche neutrone dal nucleo, per avere un atomo con una spiccata affinità elettronica, che si traduce in proprietà radicalmente diverse da quelle del gas nobile. Nella metafora planetaria, ciò non accade: il passaggio a un sistema con un pianetino in meno, e un sole un po' più leggero, non comporta radicali differenze di comportamento.

Infine, forse il difetto fondamentale del modello planetario. Secondo la dinamica classica un sistema di cariche elettriche può stare in equilibrio soltanto se queste sono in moto. La limitata estensione dell'atomo implica che le cariche elettriche devono muoversi secondo orbite chiuse, la cui percorrenza, necessariamente, comporta un moto accelerato per le cariche. Poiché ogni carica elettrica accelerata irraggia energia, l'atomo "planetario" non può essere stabile<sup>6</sup>.

Per risolvere tutti questi problemi, si è costretti ad assumere che, per ragioni imprecisate, la visione classica non risulti corretta, e che esistano alcune orbite privilegiate che l'elettrone percorre senza irraggiare, in evidente violazione con l'elettromagnetismo classico.

Partendo dall'osservazione che la costante di Planck ha le dimensioni del prodotto di un impulso per una distanza:

$$[h] = [E][T] = [ML^2T^{-2}][T] = [ML^2T^{-1}] = [MLT^{-1}][T],$$

il fisico danese Niels Bohr nel descrivere l'atomo d'idrogeno assume che risulti quantizzato il momento angolare dell'elettrone in moto intorno al protone ( $\hbar = h/2\pi$ )

$$m v_n r_n = n \hbar \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2.3)$$

da cui, risulta

$$r_n = n \frac{h}{2\pi} \frac{1}{m v_n},$$

ovvero, tenendo conto della relazione di de Broglie (2.2)

$$r_n = \frac{n}{2\pi} \lambda,$$

---

<sup>6</sup>Nel caso di orbite circolari percorse con velocità costante, tutta l'energia dell'elettrone verrebbe irraggiata in tempi dell'ordine di decine di picosecondi.



quindi:

$$2\pi r_n = n\lambda \quad (2.4)$$

ovvero, *le orbite permesse sono quelle nella cui circonferenza è contenuto un numero intero di lunghezze d'onda*. Questa condizione, se ammettiamo che l'elettrone sia effettivamente associato a un'onda, è quella che consente l'instaurarsi di un'onda stazionaria lungo l'orbita (cfr Fig. 2.9). Ecco perché l'elettrone non irraggia. Ecco perché le proprietà degli atomi non mutano nel tempo.

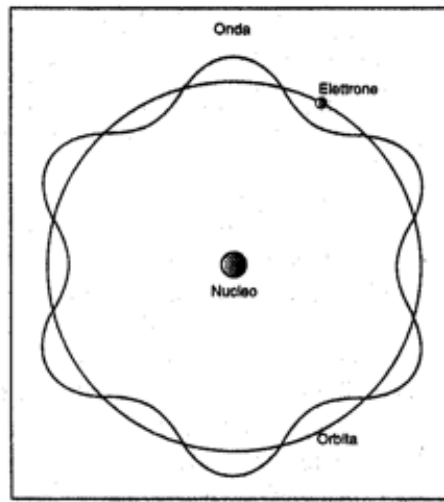


Figura 2.9: Onda stazionaria associata a un elettrone atomico.

È facile mostrare che la condizione di quantizzazione del momento angolare introdotta da Bohr comporta la quantizzazione anche dell'energia dell'elettrone. Infatti, l'attrazione coulombiana a cui è sottoposto l'elettrone da parte del protone agisce come forza centripeta che lo mantiene su un'orbita circolare, e, quindi:

$$\frac{m v_n^2}{r_n} = k_e \frac{e^2}{r_n^2} \quad \left( k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \quad (2.5)$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per  $m$  e utilizzando la (2.3), otteniamo:

$$(m v_n)^2 = m k_e \frac{e^2}{r_n} = \frac{(n\hbar)^2}{r_n^2}$$

ovvero

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2}{k_e e^2 m} = n^2 a_0 \quad (2.6)$$

dove la quantità

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{k_e e^2 m} \simeq 0.53 \text{ \AA} \quad (2.7)$$

è nota con il nome di *raggio di Bohr*. L'energia dell'elettrone che percorre la  $n$ -esima orbita risulta essere

$$E_n = m \frac{v_n^2}{2} - k_e \frac{e^2}{r_n}$$

che, in base alla (2.5), possiamo riscrivere come

$$E_n = \frac{1}{2} k_e \frac{e^2}{r_n} - k_e \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{2} k_e \frac{e^2}{r_n}$$

da cui, utilizzando la (2.6), si ottiene, infine

$$E_n = -\frac{1}{2 n^2} \frac{k_e e^2}{a_0}. \quad (2.8)$$

Ovvero, anche *l'energia risulta quantizzata!*

## 2.5 Onde di probabilità

Abbiamo visto che l'idea di de Broglie, applicata da Bohr all'atomo, consente di spiegare alcuni degli aspetti più misteriosi della materia. Ciò significa che gli elettroni all'interno degli atomi sono come le onde elettromagnetiche di cui è costituita la luce? Se sì, cosa "vibra" nel caso degli elettroni? Qual è la reale essenza fisica di questa onde?

Nell'idea originale di de Broglie, l'onda è associata alla particella ma distinta da essa. In qualche modo, è come se la particella si muovesse a cavallo di tale onda. L'immagine è un po' artificiale e, proprio per questo, difficile da cogliere: de Broglie ha proposto soltanto un'utile e ingegnosa formula. Per comprendere la natura di questa onda occorre tornare all'esperimento delle due fenditure. In questo esperimento, ciò che misuriamo non è l'intensità di un'onda reale ma, piuttosto, la probabilità d'arrivo degli elettroni nelle varie posizioni sullo schermo. Dalla matematica della curva d'interferenza, vediamo che deve esistere qualcosa come l'"altezza" di un'onda nel caso degli elettroni. Il problema è stabilire qual è il suo significato.

Poichè il suo quadrato deve fornire la corrispondente probabilità d'arrivo, tale "altezza" è detta **ampiezza di probabilità** o **funzione d'onda**, e la indichiamo con  $\psi$ . Le nostre equazioni per la probabilità d'arrivo degli

elettroni avranno esattamente la stessa forma come per le onde d'acqua, per cui, nei tre casi sperimentali possibili, tali probabilità sono date da:

$$P_1 = |\psi_1|^2, \quad P_2 = |\psi_2|^2, \quad P_{12} = |\psi_1 + \psi_2|^2,$$

e, come prima, risulta:

$$P_{12} \neq P_1 + P_2.$$

In conclusione, gli elettroni mostrano interferenza ondulatoria nel loro schema di arrivo sullo schermo a dispetto del fatto che essi ci giungano in blocchi, proprio come i proiettili. È in questo senso che diciamo che gli oggetti quantistici in alcune circostanze si comportano come onde, e in altre come particelle.

*Questa descrizione è l'essenza della Meccanica Quantistica!*

Possiamo riassumere questa discussione nei seguenti tre punti essenziali:

1. la probabilità di un evento in un esperimento ideale è data dal quadrato di un numero complesso  $\psi$ , detto ampiezza di probabilità

$$P = |\psi|^2;$$

2. quando un evento può avvenire secondo varie alternative, l'ampiezza di probabilità per l'evento è la somma delle ampiezze di probabilità per le varie alternative (**Principio di Sovrapposizione**), ovvero si ha interferenza

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad \longrightarrow \quad P = |\psi_1 + \psi_2|^2;$$

3. se si effettua un esperimento in grado di determinare se una o l'altra delle possibili alternative è effettivamente realizzata, la probabilità è la somma delle probabilità di ciascuna delle alternative, ovvero *non* si ha interferenza

$$P = P_1 + P_2.$$

Questa interpretazione probabilistica, introdotta da Max Born, rappresenta una rottura fondamentale con la Fisica Classica, in quanto, ora, le probabilità intervengono come un'essenziale e intrinseca limitazione della teoria. Ovviamente, le probabilità saltano fuori anche in Fisica Classica, ma solo come limitazione "pratica", non come restrizione fondamentale, di "principio", su cosa possiamo conoscere di un sistema. L'unico motivo per cui non possiamo prevedere in anticipo su quale casella andrà a fermarsi la pallina della roulette, è l'ignoranza riguardo le condizioni iniziali: meccanica della ruota; forma, dimensioni e massa della pallina; attriti nei supporti; spinta impartita

dal croupier; etc. Se potessi, in qualche modo, avere accesso a tali informazioni potrei prevedere il risultato del lancio. Ovviamente tale conoscenza è inaccessibile nella pratica, ma il fatto che nulla in linea di principio vieti di ottenerla è d'importanza fondamentale. La probabilità nel mondo macroscopico (e nella Fisica Classica) è una probabilità d'ignoranza e per essa si parla di **casualità soggettiva**. Quella che interviene nel mondo microscopico è, invece, inerente la struttura fondamentale della materia. Nell'esperimento delle due fenditure, la posizione d'arrivo sullo schermo del singolo elettrone è intrinsecamente imprevedibile: possiamo fare affermazioni soltanto riguardo alla probabilità di arrivo dell'elettrone. Per indicare questo tipo d'incertezza intrinseca si parla di **casualità oggettiva**.

Quando l'arrivo dell'elettrone è registrato dal rivelatore, la funzione d'onda, in precedenza diffusa in tutto lo spazio, immediatamente *collassa* alla regione di spazio delimitata dal rivelatore. Tale processo di collasso non è governato da alcuna equazione e rappresenta uno degli aspetti più misteriosi e dibattuti della Meccanica Quantistica.

## 2.6 Effetto fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico consiste nell'emissione di elettroni da parte di alcuni metalli la cui superficie è investita da un intenso fascio di luce. Questo fenomeno non è sorprendente: la luce è radiazione e.m., per cui è lecito aspettarsi che il campo elettrico dell'onda luminosa possa esercitare una forza sugli elettroni superficiali e provocare l'espulsione di alcuni di essi dal metallo. Nel 1902, però, il fisico tedesco Philipp von Lénárd osservò alcuni strani comportamenti. Ad esempio:

- maggiore è l'intensità della luce, maggiore è il numero di elettroni emessi, tutti della stessa energia;
- più corta è la lunghezza d'onda della luce incidente, maggiore è l'energia degli elettroni.

Entrambi questi risultati sono inspiegabili nell'ambito della teoria ondulatoria classica della luce: l'energia di un'onda dipende dalla sua intensità - percepita, nel caso della luce, come brillantezza -, non dalla sua lunghezza d'onda.

Nel 1905, Einstein, allora oscuro impiegato dell'Ufficio Brevetti di Berna, suggerì una spiegazione per entrambi questi comportamenti: l'energia in un fascio di luce monocromatica è distribuita in pacchetti di grandezza  $h\nu$ , dove  $\nu$  è la frequenza della luce. Questo **quantum** d'energia può essere trasferito

completamente a un elettrone. Se indichiamo con  $W$  (costante caratteristica del materiale, indipendente da  $\nu$ ) l'energia necessaria per rimuovere l'elettrone dal metallo, l'elettrone verrà emesso con una energia cinetica

$$T = h\nu - W.$$

Questa è l'*equazione fotoelettrica* di Einstein: l'energia degli elettroni emessi cresce linearmente con la frequenza ma è indipendente dall'intensità della sorgente luminosa. È evidente che maggiore è l'intensità della luce, maggiore è il numero di quanti presenti e, quindi, maggiore sarà il numero di elettroni con energia cinetica  $T$  prodotti.

Einstein era giunto a questa idea dall'osservazione che alcuni aspetti misteriosi della legge del corpo nero potevano essere compresi assegnando proprietà corpuscolari alla radiazione e.m. confinata in una cavità, ovvero assumendo che l'energia radiante consistesse di quanti di grandezza  $h\nu$ . Ai tempi in cui fu proposta, il reale significato dell'ipotesi di Planck era avvolto nella più profonda oscurità e il punto di vista suggerito da Einstein rappresentò un importante passo avanti. L'aspetto più rilevante era, però, costituito dal fatto che tale idea era trasferibile anche a una nuova situazione, ovvero l'effetto fotoelettrico.

Dieci anni dopo, Einstein avanzò l'ipotesi che questi quanti di luce, nelle interazioni con la materia, fossero in grado di trasferire, oltre all'energia, anche una quantità d'impulso pari a<sup>7</sup>:

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (2.9)$$

Questa idea conferisce ancor più lo status di particella ai quanti di luce. La comunità dei fisici del tempo fu comprensibilmente restia ad accettare la nozione che la luce potesse essere composta di particelle<sup>8</sup>. Uno dei risultati che orientò definitivamente verso l'accettazione dell'idea di Einstein fu l'esperimento di Arthur Compton, il quale mostrò come i raggi X collidono con gli

<sup>7</sup>Ovvero, la formula di de Broglie è di Einstein!

<sup>8</sup>Newton, nel 1665, spiegò la scomposizione nei vari colori della luce solare incidente su un prisma di vetro assumendo che la luce bianca fosse una miscela di particelle che davano luogo ai diversi colori: poiché queste particelle interagivano in modo diverso con la materia, all'uscita del prisma risultavano separate. La notorietà del proponente consentì la rapida affermazione di questa visione particellare. A corroborare l'idea contribuì anche l'osservata nettezza delle ombre degli oggetti: se la luce fosse stata un'onda le ombre avrebbero dovuto essere sfocate, si credeva a quel tempo. Questa idea resistette per oltre un secolo, fino a quando, nel 1801, Young realizzò l'esperimento della doppia fenditura con la luce. Questo esperimento mostrò in modo incontrovertibile la natura ondulatoria della luce (le ombre nette sono conseguenza del fatto che la lunghezza d'onda della luce visibile è estremamente piccola: un decimo di micron.)

elettroni (*effetto Compton*) allo stesso modo delle particelle dotate di energia e impulso. Questo risultato realizzò la connessione tra le due equazioni per i quanti di luce: dalla espressione  $E = h\nu$  dell'energia del quanto e dalla (2.9), tenendo conto che  $\lambda = c/\nu$ , si ottiene facilmente

$$E = p c,$$

il che implica che il quanto di luce ha massa nulla e, quindi, si muove alla velocità della luce<sup>9</sup>. Nel 1929, G. N. Lewis propose per il quanto di luce il nome di **fotone**.

## 2.7 Il Principio d'Indeterminazione di Heisenberg

Adesso che abbiamo scoperto che la luce viaggia in pacchetti di energia fissata, possiamo tornare ad analizzare più in dettaglio l'esperimento delle due fenditure con la sorgente di luce tra esse, descritto in sezione 2.2.

L'aspetto paradossale di questo esperimento è rappresentato dal differente risultato che otteniamo se accendiamo, o meno, la sorgente luminosa per osservare gli elettroni. La soluzione di questo apparente paradosso è nella natura quantistica della luce stessa. Infatti, per osservare un oggetto dobbiamo inviare contro di esso almeno un fotone. Se l'oggetto è un proiettile, il suo moto non è alterato in alcun modo apprezzabile dall'interazione con il fotone. Diverso è il caso degli elettroni, i quali, invece, subiscono una perturbazione che modifica sostanzialmente il loro moto, con conseguente distruzione della figura d'interferenza. Si potrebbe pensare che diminuendo di molto l'intensità della luce la perturbazione diviene piccolissima e, quindi, la figura d'interferenza si mantiene. In realtà, se riduciamo l'intensità della luce diminuiamo il numero di fotoni emessi al secondo ma non l'energia di ciascuno di essi. In queste condizioni, con pochi fotoni nell'apparato, c'è una considerevole probabilità che un elettrone passi oltre lo schermo senza essere intercettato da uno dei fotoni della sorgente. Quindi, si costituisce un terzo gruppo di elettroni che arrivano allo schermo: quelli che abbiamo mancato di osservare con la sorgente luminosa e che, quindi, non siamo in grado di dire

<sup>9</sup>Per comprendere queste affermazioni occorre tener presente che le espressioni relativistiche della velocità e dell'energia di una particella di massa  $m$  e impulso  $p$  sono, rispettivamente:

$$v = \frac{c^2 p}{E} \qquad E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

per quale fenditura sono passati. Se osserviamo la loro distribuzione sullo schermo, vediamo che essa mostra interferenza.

Ciò è comprensibile. Quando non vediamo un elettrone nessun fotone ci ha interagito; quando lo vediamo è perché ha interagito con un fotone. Si ha sempre la stessa alterazione perché i fotoni producono effetti di eguale entità e il risultato della diffusione dei fotoni è sufficiente a cancellare ogni effetto d'interferenza. Esiste un modo di vedere gli elettroni senza disturbarli?

La spinta che l'elettrone riceve dalla collisione con il fotone dipende certamente dall'impulso di quest'ultimo, per cui, volendo ridurre la perturbazione introdotta dal fotone occorre diminuire il suo impulso, ovvero, in base alla (2.9), aumentarne la lunghezza d'onda. Quindi, se vogliamo perturbare poco l'elettrone non dobbiamo diminuire l'intensità della luce ma la frequenza. Supponiamo di ripetere il nostro esperimento aumentando progressivamente la lunghezza d'onda della luce. Tutto procede come prima fin quando la lunghezza d'onda della luce diviene confrontabile o maggiore della distanza tra le due fenditure. Quando è verificata tale condizione l'interazione della luce con l'elettrone è accompagnata da un lampo sfocato: non siamo più in grado di stabilire per quale foro è passato l'elettrone. Possiamo solo dire che è passato nelle vicinanze delle fenditure. Per questo valore di lunghezza d'onda la spinta ricevuta dall'elettrone è abbastanza piccola da rendere  $P'_{12}$  simile a  $P_{12}$ , ovvero da cominciare a osservare effetti di interferenza. Per lunghezze d'onda molto maggiori della separazione tra le due fenditure non sappiamo più nulla sulla posizione dell'elettrone, la perturbazione introdotta dal fotone è piccolissima e riotteniamo la figura d'interferenza  $P_{12}$ .

Questo risultato è indicativo di un principio generale della teoria quantistica, detto **Principio d'Indeterminazione di Heisenberg**, secondo il quale è *impossibile realizzare un dispositivo il cui scopo sia quello di stabilire per quale foro è passato l'elettrone, senza nel contempo perturbarlo così lievemente da non distruggere la figura d'interferenza.*

Dal punto di vista matematico questo principio si traduce in una relazione tra l'incertezza  $\Delta x$  nella conoscenza della posizione di una particella e quella  $\Delta p$  nella conoscenza del suo impulso:

$$\Delta x \Delta p \gtrsim h. \quad (2.10)$$

Questa relazione si riferisce alle misure di posizione e impulso eseguite *contemporaneamente*.

L'esempio che segue mostra come questa indeterminazione sia immediata conseguenza della natura ondulatoria delle particelle. Supponiamo di inviare

un fascio di particelle collineari<sup>10</sup> di una certa energia su una fenditura di larghezza  $B$ . In senso classico, tutte queste particelle hanno impulso  $\vec{p}_0$  diretto perpendicolarmente alla fenditura, ovvero  $p_y = 0$ , e, quindi, classicamente la componente verticale dell'impulso è perfettamente nota (cfr. Fig. 2.10). Il

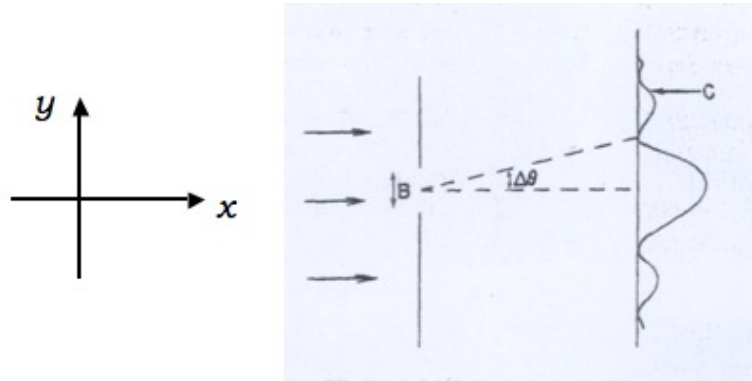


Figura 2.10: Diffrazione di un fascio di particelle da un fenditura.

passaggio della particella attraverso la fenditura implica la conoscenza della sua posizione verticale  $y$  con un'incertezza  $\Delta y$  dell'ordine di  $B$  ( $\pm B/2$ ). Oltre la fenditura, però, secondo la teoria ondulatoria, le particelle si sparpagliano, così come accade alla luce: abbiamo il fenomeno della *diffrazione*. Il fascio si allarga e la sua apertura (l'angolo sotteso dalla posizione del primo minimo dell'intensità luminosa sullo schermo - cfr Fig. 2.10) è una misura dell'indeterminazione angolare nel fascio finale. Questo allargamento si traduce in una componente  $y$  dell'impulso delle particelle oltre la fenditura. Quindi, in definitiva, prima della fenditura sappiamo l'impulso ma non la coordinata verticale delle particelle; dopo la fenditura sappiamo la coordinata verticale delle particelle, dal fatto che hanno oltrepassato la fenditura stessa, ma abbiamo perso l'informazione circa  $p_y$ .

Approssimativamente, la componente verticale dell'impulso è data da:

$$\Delta p_y \sim p_0 \Delta\theta.$$

Poiché il primo minimo corrisponde ad un angolo  $\Delta\theta$  tale che le onde provenienti dai due estremi della fenditura percorrono cammini che differiscono di una lunghezza d'onda, si ha

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{B},$$

<sup>10</sup>Significa che le particelle hanno tutte la stessa direzione di moto. Questa condizione si ottiene ponendo la sorgente delle particelle lontanissimo dalla fenditura.



si ottiene

$$\Delta p_y = \frac{p_0 \lambda}{B}. \quad (2.11)$$

Vediamo, quindi, che se diminuiamo la larghezza della fenditura, ovvero determiniamo con più precisione la posizione di una generica particella del fascio incidente, aumenta lo sparpagliamento del fascio, ovvero l'incertezza sulla componente verticale del suo impulso. Il prodotto delle due indeterminazioni è costante e pari a  $p_0 \lambda$ . Se ora trasferiamo il discorso in ambito quantistico, in base alla relazione di de Broglie, abbiamo:

$$p_0 = \frac{h}{\lambda},$$

che inserita nella (2.11) ci consente di riottenere l'espressione matematica del Principio d'Indeterminazione:

$$B \Delta p_y \approx h$$

(la larghezza  $B$  della fenditura agisce da incertezza  $\Delta y$  sulla posizione delle particelle). Questa analisi permette di concludere che esiste un limite invalicabile alla precisione con cui possono misurarsi coppie di variabili quali la posizione e la velocità, le quali costituiscono i prototipi delle cosiddette *variabili incompatibili*. Se accettiamo come vera la teoria, l'esistenza di questo limite ha un carattere fondamentale ed è diretta conseguenza della peculiare natura corpuscolare-ondulatoria di tutti i processi fisici.

Non tutte le variabili fisiche che caratterizzano un sistema risultano incompatibili tra loro come posizione e velocità. Consideriamo un processo che prevede due misure il cui scopo è quello di determinare le posizioni di una particella lungo due direzioni ortogonali,  $x$  e  $y$  (cfr Fig. 2.11). Il fascio iniziale è esteso uniformemente su un quadrato di lato  $D$  nel piano  $(x, y)$ . Questo significa che, prima di qualsiasi misura, le posizioni lungo entrambe le coordinate sono note con una indeterminazione pari a  $D$ . Supponiamo di voler migliorare la nostra conoscenza della posizione lungo  $x$ . A tale scopo, disponiamo lungo la linea di volo del fascio uno schermo su cui è praticata una fenditura parallela all'asse  $y$ , e di altezza  $d \ll D$  lungo l'asse  $x$ . Le particelle che oltrepassano lo schermo hanno una posizione che si trova all'interno<sup>11</sup> del rettangolo di lati  $d$  e  $D$ , rispettivamente lungo  $x$  e  $y$ .

Supponiamo ora di voler migliorare la conoscenza della coordinata  $y$  delle particelle che hanno oltrepassato la fenditura. Allo scopo, inseriamo un secondo schermo sul quale è stata realizzata una fenditura parallela all'asse  $x$  e

<sup>11</sup>Causa la diffrazione, dopo il passaggio attraverso la fenditura il fascio s'allarga lungo  $x$ . Se la seconda misura è immediatamente successiva alla prima, il fascio non ha modo di allargarsi apprezzabilmente.

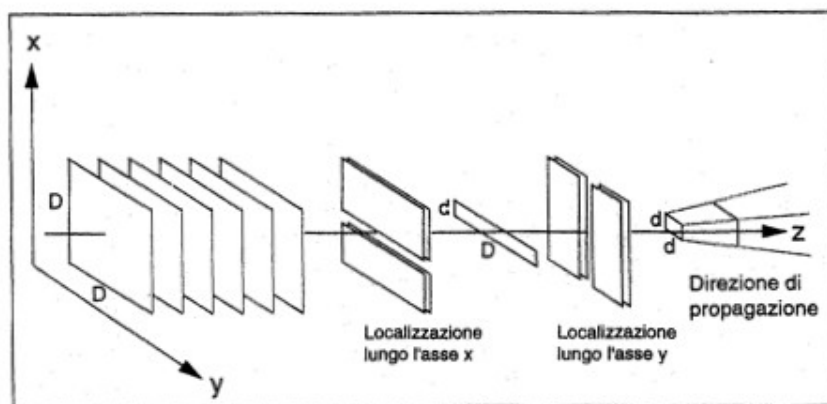


Figura 2.11: Apparato per la misura della posizione lungo due direzioni ortogonali tra loro.

di apertura  $d$  lungo l'asse  $y$ . È evidente che questa misura non altera l'estensione del fascio lungo  $x$ . Le due misure si possono pensare eseguite in rapida successione temporale, o, addirittura, contemporaneamente utilizzando uno schermo su cui si è realizzata un'apertura quadrata di lato  $d$ . Nulla cambia nella descrizione del processo: le particelle che emergono da questa fenditura avranno indeterminazioni in posizioni  $\Delta x = \Delta y \sim d$ , con  $d$  che può essere reso piccolo quanto si vuole.

In altre parole, le due osservabili: “posizione  $x$ ” e “posizione  $y$ ”, risultano compatibili. Le relative misure non si disturbano a vicenda e la teoria non pone alcun limite concettuale alla determinazione simultanea e arbitrariamente accurata di tali grandezze. Ovviamente l'attraversamento delle due fenditure produce la diffrazione del fascio in entrambe le direzioni, con conseguente perdita d'informazione circa le componenti della velocità lungo i due assi. Le relative indeterminazioni sono sottoposte al vincolo introdotto dal principio di Heisenberg.

Passiamo ad analizzare più in dettaglio il significato del principio di Heisenberg. Quando sottoponiamo a osservazione un sistema fisico lo disturbiamo. Nell'ambito della Fisica Classica ci sono due modi di superare il problema:

1. possiamo ridurre l'entità della perturbazione quanto vogliamo; ad esempio, nel caso della doppia fenditura possiamo diminuire a piacere l'intensità della sorgente luminosa;
2. poichè ogni perturbazione è governata dalle leggi della Fisica, possiamo correggerne l'effetto: dall'applicazione delle leggi di conservazione

dell'energia e dell'impulso, possiamo determinare come cambia il moto di un corpo a causa della collisione con un altro senza dover guardare alla collisione stessa, e, quindi, eseguire qualunque misura con il livello di accuratezza desiderato.

Il contributo di Heisenberg non è stato quello di aver messo in evidenza che la misura influisce sul sistema misurato, ma, piuttosto, nell'aver capito che *a livello microscopico esistono limiti fondamentali all'operazione di misura*. Innanzitutto, mentre secondo la Fisica Classica possiamo rendere la perturbazione piccola a piacere, nell'ambito della Meccanica Quantistica ciò non è consentito. L'azione della luce, ad esempio, è quantizzata, così che un fotone non può evitare di disturbare una particella con cui esso interagisce. In secondo luogo, la perturbazione è incontrollabile e imprevedibile. Questo aspetto riflette la natura intrinsecamente statistica della Meccanica Quantistica. Le due nuove caratteristiche che l'analisi di Heisenberg mette in luce sono:

- la perturbazione non può essere ridotta al disotto di un livello fondamentale;
- la perturbazione non può essere compensata.

La differenza tra gli esperimenti delle due fenditure con i proiettili e con gli elettroni è quella tra due concetti completamente diversi: *ignoranza classica* e *incertezza quantistica*. La prima è lo stato perfettamente normale di insicurezza relativamente alle cose del mondo. Siamo in uno stato d'ignoranza classica quando non ricordiamo la data del giorno, o quando siamo incerti circa il nome di qualcuno. Sebbene non abbiamo queste informazioni, siamo d'altra parte certi che tutti hanno un nome e che oggi corrisponde a una certa data: *il mondo è in uno stato ben definito, ma non sappiamo qual è*. Ciò non ha nulla a che fare con l'ignoranza quantistica. In questo caso, non accade che il mondo posseda uno stato classico definito. Anche le particelle che si trovano in uno stato quantistico ben definito sono perfettamente in grado di passare attraverso più di una fenditura allo stesso tempo<sup>12</sup>. È bene sottolineare che questa dicotomia tra incertezza quantistica e ignoranza classica non è una distinzione astratta ma ha un chiaro riscontro sperimentale: la comparsa o meno di una figura d'interferenza.

---

<sup>12</sup>Una domanda cruciale è se un tale stato quantistico cattura tutte le proprietà fisiche di un sistema o se, alternativamente, la descrizione quantistica è incompleta. Avremo modo di tornare su questo punto fondamentale più avanti.

## 2.8 Conseguenze del Principio d'Indeterminazione

In ciò che segue mostreremo come il principio di Heisenberg impedisca la definizione del concetto di traiettoria nell'ambito microscopico e determini le dimensioni degli atomi.

### 2.8.1 Concetto di traiettoria

La precisa individuazione della traiettoria di una particella dipende dalla simultanea specificazione di posizione e velocità di questa, cosa che è proibita dal principio di Heisenberg. Questo significa che l'idea di cammino attraverso lo spazio perde di significato ben definito. Tale fatto gioca un ruolo essenziale nel tentativo di afferrare il mistero dell'interferenza degli elettroni. Abbiamo avuto modo di ripetere in varie occasioni che il fenomeno è impossibile da comprendere in termini puramente classici. È bene sottolineare che il fenomeno è così stupefacente ai nostri occhi proprio perché è per noi inconcepibile una traiettoria che passa allo stesso tempo per due fenditure. La nostra difficoltà nel rappresentare l'interferenza delle particelle nasceva dalla nostra inconscia assunzione che il concetto classico di traiettoria fosse applicabile anche agli elettroni.

### 2.8.2 Dimensioni atomiche

Il Principio d'Indeterminazione non ha soltanto scosso alle fondamenta la nostra comprensione del mondo, ma ha anche consentito di risolvere alcuni dei problemi più angosciosi della Fisica.

Ad esempio, una proprietà fondamentale come l'esistenza stessa degli atomi è connessa a tale principio. Abbiamo già avuto modo di mettere in risalto l'inconsistenza del modello atomico di Rutherford (cfr sezione 2.4): gli elettroni, dal punto di vista classico, non possono orbitare intorno al nucleo senza emettere radiazione e.m. e, con moto a spirale, cadere sul nucleo. Tutto ciò non può essere corretto dal punto di vista della teoria quantistica. Infatti, se così avvenisse, saremmo nella condizione di sapere esattamente che l'elettrone è confinato in una regione di spazio di dimensione praticamente zero (ricordiamo che il raggio del nucleo è dell'ordine di  $10^{-15}$  cm = 1 fm), e, per la relazione di Heisenberg, gli elettroni acquisterebbero di conseguenza un impulso pressoché infinito: un'evidente assurdità.

Possiamo ora estendere questo argomento e tentare di predire la dimensione tipica di un atomo, ad esempio, d'idrogeno. Dire che un atomo d'idroge-

no ha un raggio  $a$  significa dire che l'indeterminazione nella posizione del suo solo elettrone è dell'ordine di  $a$ . Questo, in base alla (2.10), comporta una indeterminazione nell'impulso dell'ordine di  $h/a$ , e, quindi, un'energia cinetica<sup>13</sup>

$$\frac{p^2}{2m} \sim \frac{h^2}{2m a^2}, \quad (2.12)$$

per cui l'energia totale dell'elettrone sarà

$$E \sim \frac{h^2}{2m a^2} - k_e \frac{e^2}{a}. \quad (2.13)$$

L'atomo si sistemerà secondo un compromesso che renda tale energia totale la più piccola possibile. Tale condizione di minimo si ottiene imponendo

$$\frac{dE}{da} = 0,$$

da cui si ottiene:

$$a = a_0$$

dove  $a_0$  è il raggio di Bohr definito in (2.7). Ovvero, le dimensioni dell'atomo sono dell'ordine dell'Angstrom, il che è giusto. Se sostituiamo  $a_0$  nell'espressione (2.13), troviamo il valore minimo dell'energia:

$$E_0 = -\frac{e^2}{2a_0} = \frac{m e^4}{2h^2} = -13.6 \text{ eV}.$$

Perché l'energia è negativa? Perché l'elettrone nell'atomo è legato e ha un'energia minore rispetto al caso in cui è libero. Significa che bisogna spendere una certa energia per tirarlo fuori dall'atomo.

Un'analisi dello stesso tipo è applicabile anche al caso del nucleo dell'atomo. Non abbiamo una formula semplice come quella Coulomb per descrivere le forze tra protoni e neutroni ma possiamo usare la dimensione tipica misurata per un nucleo,  $r \sim 1 \text{ fm}$ , e il valore della massa di un nucleone per ottenere, tramite la (2.12), un valore d'energia dell'ordine di 1 MeV. Ovvero, l'energia tipica ottenibile in un processo nucleare è cinque ordini di grandezza maggiore dell'energia tipica di un elettrone nell'atomo, che è la tipica energia coinvolta nelle reazioni chimiche.

---

<sup>13</sup>Si tratta solo di una stima di ordine di grandezza, per cui il risultato che otterremo sarà accurato a meno di fattori 2,  $\pi$ , etc.

## 2.9 Indeterminazione Energia-Tempo

La relazione di Heisenberg (2.10) non è l'unica relazione d'incertezza nel mondo microscopico. Un'altra relazione, di fondamentale importanza per la Fisica delle Particelle Elementari, coinvolge l'energia e il tempo:

$$\Delta E \Delta t \geq h. \quad (2.14)$$

Si tratta di una sorta di principio d'indulgenza della natura: *è concessa qualsiasi violazione del principio di conservazione dell'energia purché si manifesti per un tempo corrispondentemente piccolo.*

Vediamo ora alcune conseguenze di questa relazione d'incertezza.

### 2.9.1 Decadimento di stati instabili

Ritorniamo per un momento all'atomo di Bohr descritto in sezione 2.4. Abbiamo visto che l'elettrone può trovarsi ad occupare diversi livelli energetici. Tra questi, solo lo stato fondamentale, corrispondente a  $n = 0$ , risulta stabile. Quando l'elettrone occupa uno degli stati con  $n > 0$ , si dice che l'atomo si trova in uno stato eccitato, dal quale tende a decadere verso stati di energia più bassa emettendo un fotone. Nel caso in cui l'elettrone "salta" dal livello  $n$  a quello  $m$  ( $m < n$ ), in base alla (2.8), l'energia del fotone risulta essere:

$$E_{nm} = E_n - E_m = \left( -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right) \frac{k_e e^2}{2 a_0}$$

e la sua frequenza (per la formula di Einstein) è:

$$\nu = \frac{E_{nm}}{h} = \frac{k_e e^2}{2 h a_0} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

che è la cosiddetta formula di Rydberg alla base dell'interpretazione delle righe spettrali dell'atomo d'idrogeno (cfr Fig. 2.12).

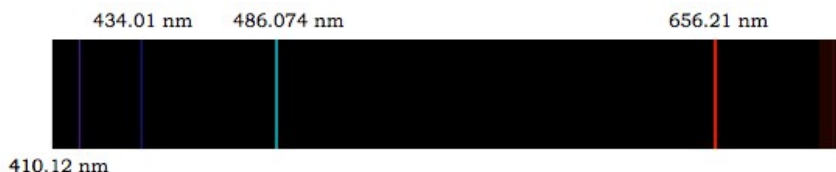


Figura 2.12: Spettro d'emissione dell'atomo d'idrogeno.

Supponiamo ora che, in conseguenza di una cessione d'energia, un atomo d'idrogeno sia stato portato dal suo stato fondamentale a uno eccitato. Come anticipato, la situazione così raggiunta non è stabile, e l'atomo tende a decadere nel suo stato fondamentale. L'intervallo di tempo durante il quale l'atomo permane nello stato eccitato, prima di tornare allo stato originario emettendo un fotone, è completamente indeterminato e non può essere calcolato: una delle altre manifestazioni dell'intrinseca indeterminatezza del mondo microscopico. È però possibile definire esattamente la probabilità che il fotone venga emesso in un qualsiasi particolare intervallo di tempo. Infatti, se passiamo a considerare un gran numero di atomi d'idrogeno, vedremo che alcuni emetteranno il fotone immediatamente; altri dopo un tempo maggiore; pochi, infine, dopo un tempo molto lungo. Potremo, quindi, definire un tempo medio di decadimento. Se ripetiamo l'osservazione molte volte, ogni volta considerando un numero molto grande di atomi, la vitamedia<sup>14</sup> dello stato eccitato risulterà, con un certo grado di approssimazione, esattamente la stessa per ogni gruppo. Questa vitamedia è perfettamente definita e rappresenta una misura della probabilità di decadimento dello stato eccitato che può essere calcolata con precisione arbitrariamente elevata aumentando il numero di atomi osservati, in analogia con quanto accade per la definizione di probabilità dell'occorrenza di testa e croce nel lancio di una moneta. Ciononostante, così come lanciando una moneta non posso stabilire con certezza se otterrò testa o croce, l'intervallo di tempo corrispondente alla vita di ciascun atomo eccitato è indeterminato: esso potrebbe decadere assai prima dei suoi compagni, o sopravvivere a tutti loro.

Se indichiamo con  $\Delta t$  la vitamedia di uno stato eccitato, in base alla (2.14), la sua energia risulta incerta di una quantità  $\Delta E = h/\Delta t$ , e, quindi, la linea spettrale prodotta dalla transizione non è perfettamente definita, ma è caratterizzata da una larghezza finita che è inversamente proporzionale alla vitamedia dello stato eccitato. Di seguito, descriviamo due esempi tratti dall'Astrofisica e dalla Fisica delle Particelle Elementari.

<sup>14</sup>Poiché tutti gli eventi hanno la stessa probabilità di accadere, la diminuzione  $\delta N$  nel numero di atomi eccitati in un intervallo di tempo  $\delta t$  è proporzionale al numero stesso, ovvero l'andamento nel tempo del numero di atomi eccitati è governato dalla seguente legge

$$\frac{\delta N}{\delta t} = -\lambda N(t)$$

da cui si ottiene

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

dove  $N_0 = N(0)$  rappresenta il numero iniziale di atomi e  $\tau = 1/\lambda$  è la vitamedia del livello eccitato, ovvero il tempo necessario affinché la popolazione iniziale di atomi eccitati si riduca di un fattore  $e = 2.72828\dots$

La riga spettrale dell'idrogeno con lunghezza d'onda uguale a 21 cm (onda radio) è risultata essere di grande importanza per la radioastronomia. Questa linea spettrale corrisponde alla transizione in cui lo spin dell'elettrone da parallelo diviene antiparallelo a quello del protone. La vita media dello stato eccitato (spin paralleli) è incredibilmente lunga: 12 milioni di anni. Di conseguenza, la linea spettrale a 21 cm è incredibilmente stretta: la larghezza è  $5 \times 10^{-16}$  Hz. Questo fatto rende accessibile all'osservazione sperimentale anche delle variazioni minime della lunghezza d'onda della transizione associate dovute allo spostamento Doppler causato dal moto della sorgente. I radioastronomi usano questa tecnica per misurare con grande precisione la velocità delle nubi d'idrogeno interstellare.

Certe particelle, le cosiddette risonanze, decadono molto rapidamente, per cui le loro energie sono molto incerte. Questo comporta che le loro masse non hanno un valore ben definito, ma sono distribuite in un intervallo

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{h}{\Delta t c^2}.$$

Ad esempio, il mesone  $\rho$  decade con vita media  $4.4 \times 10^{-24}$  s, per cui la sua massa-energia è incerta di ben 150 MeV, circa il 20% della sua massa.

### 2.9.2 Il Principio d'Indeterminazione e la causalità

Nell'esperimento della doppia fenditura abbiamo visto che il Principio d'Indeterminazione impedisce di capire per quale foro passa l'elettrone. Allo stesso modo, in alcune situazioni la relazione d'indeterminazione energia-tempo non consente di stabilire se un certo effetto accade prima o dopo la sua causa.

Consideriamo l'effetto Compton, ovvero il processo di diffusione della luce da parte di un elettrone. Prima dell'interazione abbiamo un fotone di impulso  $k$  e un elettrone con impulso  $p$ ; dopo l'interazione, il fotone possiede impulso  $k'$ , mentre l'elettrone ha impulso  $p'$ . La situazione è rappresentata tramite il diagramma (di Feynman) di Fig. 2.13. Tale diagramma è la rappresentazione



Figura 2.13: Diagramma di Feynman (diretto) della diffusione Compton.



di un processo in cui all'assorbimento del fotone iniziale da parte dell'elettrone iniziale segue la creazione di uno stato intermedio il quale, dopo breve tempo, decade nel fotone e l'elettrone finali<sup>15</sup>. È come nel calcio: il giocatore ( $p$ ) riceve da un compagno la palla ( $k$ ) e, dopo averla tenuta tra i piedi per un (brevissimo) tempo, la lancia ( $k'$ ) proseguendo la sua corsa ( $p'$ ). I diagrammi di Feynman sono costruiti secondo regole ben precise: le regole di Feynman, e dalla semplice lettura del grafo è possibile scrivere l'espressione matematica dell'ampiezza di probabilità che esso rappresenta.

Quando si esegue il calcolo della probabilità del processo Compton si scopre che accanto al diagramma di Fig. 2.13 occorre considerarne un altro, ottenuto dal precedente scambiando la posizione del fotone finale con quello iniziale (cfr Fig. 2.14). Le ampiezze associate a questi due diagrammi devono essere sommate tra loro e il modulo quadro di tale somma determina la probabilità del processo. Il diagramma di scambio non è, però, così semplice

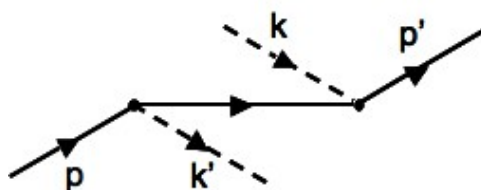


Figura 2.14: Diagramma di Feynman (di scambio) della diffusione Compton.

da interpretare. Gli stati iniziale e finale per l'elettrone sono gli stessi ma quello intermedio è abbastanza diverso. In questo caso, prima viene emesso il fotone finale ( $k'$ ), e soltanto dopo quello iniziale ( $k$ ) viene assorbito. Non vi capiterà mai di vedere un calciatore lanciare la palla prima ancora di averla ricevuta. Il diagramma di scambio viola le nostre comuni credenze circa la causalità dei processi fisici. D'altra parte, tale diagramma è necessario: se proviamo a calcolare la probabilità a partire dal solo diagramma diretto, otteniamo un risultato in disaccordo con le osservazioni sperimentali. L'accordo si ristabilisce miracolosamente solo se inseriamo anche il diagramma di scambio di Fig. 2.14.

Sperimentalmente è possibile isolare il processo rappresentato dal diagramma di scambio?<sup>16</sup> Consideriamo la diffusione Compton di un raggio X di 100 keV.

<sup>15</sup>Al diagramma si deve immaginare sovrapposto un asse temporale orizzontale, orientato da sinistra a destra.

<sup>16</sup>La domanda è puramente speculativa. Bisogna essere molto cauti nell'interpretare alla lettera i diagrammi di Feynman. Sebbene presi insieme consentano di calcolare le probabilità quantistiche, il significato di un singolo diagramma individualmente non è

Si può dimostrare che l'energia del fotone finale è data da:

$$k' = \frac{k}{1 + \frac{k}{m c^2} (1 - \cos \theta)}$$

che risulta essere massima per  $\theta = \pi$ :

$$k'_M = \frac{k}{1 + 2 \frac{k}{m c^2}}$$

Da tale formula si ottiene facilmente il massimo valore per la variazione d'energia del fotone

$$\Delta k_M = k - k'_M = 2 \frac{k'_M}{m c^2}$$

che, nel caso in considerazione ( $k = 100$  keV) vale 28.1 keV. Quindi, per poter distinguere tra fotone incidente e fotone diffuso dobbiamo disporre di un apparato per la misura dell'energia con una risoluzione  $\delta E < 28.1$  keV. Questo, per la relazione d'indeterminazione energia-tempo, comporta che la misura deve durare un tempo maggiore di<sup>17</sup>

$$\delta t = \frac{h}{\delta E} \simeq \frac{4.14 \times 10^{-18}}{28.1} = 1.5 \times 10^{-19} \text{ s.} \quad (2.15)$$

Nel primo vertice del diagramma di scambio si ha una violazione della conservazione dell'energia di un'entità pari all'energia del fotone finale, i.e.  $100 - 28.1 = 71.9$  keV. Questa violazione non costituisce un problema, purché, in base a quanto prescritto dalla relazione d'indeterminazione energia-tempo, non duri per più di

$$\frac{h}{k'_M} \simeq 5.8 \times 10^{-20} \text{ s.}$$

Questo è il tempo massimo per cui può vivere lo stato intermedio, un tempo ben più piccolo di quello richiesto per la durata della misura dell'energia del fotone finale. Quindi, sebbene possiamo distinguere il fotone incidente da quello finale grazie alla loro diversa energia, non possiamo dire se il fotone finale è originato in un processo normale o in uno in cui la relazione causa-effetto è invertita: il Principio d'Indeterminazione lo impedisce. Le due sequenze di eventi descritte dai due diagrammi di Feynman differiscono nell'ordinamento temporale: quella descritta dal diagramma diretto è perfettamente classica; quella associata al diagramma di scambio, è, in termini classici, incomprensibile. Malgrado quest'ultimo sia in contrasto con il concetto di causalità, la sua esistenza è nascosta dal Principio d'Indeterminazione.

chiaro.

<sup>17</sup>La costante di Planck vale  $4.14 \times 10^{-18}$  keV · s.

## 2.10 Esperimenti con fotoni

La trattazione dell'effetto fotoelettrico di sezione 2.6 è quella che trovate su, praticamente, tutti i libri di testo, secondo i quali tale effetto è la prova della natura corpuscolare della luce, interpretazione per la quale Einstein ricevette, nel 1921, il premio Nobel.

Però, nel 1969, Jaynes, Lamb e Scully hanno mostrato che è possibile spiegare tale effetto senza ricorrere al concetto di fotone. Questo risultato è ottenuto a partire da un'analisi *semiclassica* del processo: gli atomi sono quantistici (possiedono una struttura a livelli d'energia), ma la luce è classica (una pura onda e.m. senza alcun connotato di granularità), rappresentata da una singola onda sinusoidale di pulsazione  $\omega$ :

$$E = E_0 \cos \omega t.$$

Questa onda è trattata come una perturbazione la cui interazione con l'atomo è descritta da un potenziale (approssimazione di dipolo):

$$V(t) = -e E x(t)$$

dove  $e$  è il modulo della carica elettrica dell'elettrone e con  $x(t)$  abbiamo indicato il suo spostamento. È questa forza che determina l'espulsione dell'elettrone dall'atomo alla base dell'effetto fotoelettrico. Con i metodi standard della Meccanica Quantistica<sup>18</sup>, per la probabilità di transizione tra lo stato fondamentale e il livello eccitato di energia  $E_k$ , si trova:

$$P(t) \propto (e E_0)^2 \frac{\sin^2 \left[ (E_k - \hbar \omega) \frac{t}{2 \hbar} \right]}{(E_k - \hbar \omega)^2}, \quad (2.16)$$

da cui si vede che ci troviamo in presenza di una *risonanza*: l'eccitazione dell'elettrone si verifica soltanto quando

$$\omega = \frac{E_k}{\hbar}.$$

Da questo risultato segue che:

- esiste una soglia per l'innesco del fenomeno;
- la corrente di elettroni generata è proporzionale all'intensità luminosa (probabilità  $\propto E_0^2$ );

<sup>18</sup>La cosiddetta teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo.

ovvero, tutti gli aspetti distintivi dell'effetto fotoelettrico sono riprodotti senza dover assumere che la luce è corpuscolare. Inoltre, la natura casuale degli eventi individuali è preservata ma dovuta non alla natura quantistica della luce, ma a quella della materia.

Su quali basi, allora, crediamo nei fotoni? Come potremmo realizzare un esperimento che fornisca evidenza per la natura particellare della luce? La traccia è nel senso del termine “particella”. Per sua natura, una particella occupa una posizione definita nello spazio: è “qui” o “là”, mai in entrambi i posti contemporaneamente. Al contrario, un'onda è distribuita su una regione estesa. Siamo, quindi, portati a disegnare un esperimento che stabilisca se la luce può, o meno, essere in punti distanti tra loro allo stesso tempo. A tale scopo utilizziamo due diversi rivelatori di luce, li illuminiamo con la stessa sorgente di luce e cerchiamo di stabilire se essi generano un “click” allo stesso istante di tempo. Se la luce è una particella questo non può accadere. Consideriamo l'apparato sperimentale riportato in Fig. 2.15. La luce investe uno beam-splitter, il quale, come visto, è realizzato in modo da riflettere metà della luce che lo colpisce e lasciar passare l'altra metà, per cui se  $I$  è l'intensità della sorgente luminosa ciascun rivelatore registra un'intensità  $I/2$ . Questo è il comportamento medio, ma possiamo investigare più in dettaglio la situazione studiando la risposta temporale dei due rivelatori alla luce che incide su essi.

Ciascun rivelatore risponde alla luce con dei “click”, il che non implica che la luce sia quantizzata, ma soltanto che la risposta dei rivelatori alla luce è discretizzata<sup>19</sup>. Il circuito di coincidenza emette un segnale solo se i click dei rivelatori sono prodotti nello stesso istante.

Indicate con  $P_{1,2}$  le probabilità di risposta di  $R_{1,2}$  e con  $P_c$  quella del circuito di coincidenza, i risultati dell'esperimento sono convenientemente analizzati in termini di un parametro di *anticoincidenza* definito come:

$$A = \frac{P_c}{P_1 P_2} . \quad (2.17)$$

A seconda della natura della luce, questo parametro assume valori diversi:

- i) Se la luce è composta di fotoni,  $R_1$  e  $R_2$  non possono mai rispondere allo stesso istante. Un qualunque fotone non può essere “suddiviso” in qualche strana maniera dal beam-splitter, in modo che metà vada verso un rivelatore e metà verso l'altro; se avvenisse ciò, per la conservazione dell'energia, dovremmo osservare emergere dal beam-splitter due fotoni di energia metà e, quindi, di frequenza metà rispetto a quello emesso

<sup>19</sup>Pensate alle foglie (discrete) degli alberi che cadono sotto l'azione del vento (continuo).

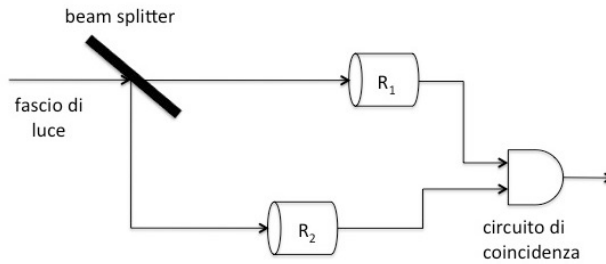


Figura 2.15: Esperimento di anticoincidenza per dimostrare la natura granulare della luce. Come rivelatori possiamo usare dei fotomoltiplicatori o delle CCD (in tutto e per tutto identiche a quella della macchina fotografica del vostro cellulare).

dalla sorgente luminosa. Invece, c'è una uguale probabilità -  $1/2$  - che un fotone venga trasmesso o riflesso dal beam-splitter. Inoltre, non c'è nessuna differenza misurabile tra i due tipi di fotoni, nessuna proprietà che consenta di determinare a priori quale percorso essi prenderanno<sup>20</sup>. Questo comporta  $P_c = 0$ , quindi  $A = 0$ .

- ii) Se la luce non possiede proprietà particellari, i rivelatori possono emettere click contemporaneamente, per cui:  $A \neq 0$ . In effetti, se i click sono generati in modo casuale, la coincidenza emerge, in modo random, dalla fortuita circostanza in cui  $R_1$  e  $R_2$  rispondono insieme, cosa che avviene con probabilità  $P_c = P_1 P_2$ , per cui  $A = 1$ .

Nell'esperimento vengono registrati i conteggi dei due rivelatori ( $N_{1,2}$ ) e il numero di coincidenze ( $N_c$ ) per un assegnato intervallo di tempo  $T$ . Ovviamente, la condizione di coincidenza si intende verificata se i segnali generati dai rivelatori si presentano all'ingresso del circuito di coincidenza con un ritardo tra loro, in modulo, minore di un certo (breve) intervallo di tempo  $\Delta t$ , che rappresenta la risoluzione temporale dell'apparato. Quindi, durante l'esperimento ciascun rivelatore ha  $T/\Delta t$  opportunità di generare un click; lo stesso dicasi per il contatore di coincidenze. Le probabilità di risposta si ottengono come rapporto tra i conteggi e il numero di opportunità, ovvero

<sup>20</sup>È bene notare che la sequenza dei fotoni nei due rivelatori non è regolare: non è che se un fotone viene riflesso quello successivo è trasmesso, e viceversa: la sorte di ciascun fotone, quando colpisce il beam-splitter, è determinata lanciando una moneta.

( $\alpha = 1, 2, c$ ):

$$P_\alpha = \frac{N_\alpha}{(T/\Delta t)}$$

da cui si ottiene

$$A = \frac{N_c}{N_1 N_2} \left( \frac{T}{\Delta t} \right) \quad (2.18)$$

I primi a realizzare questo tipo di esperimento furono i fisici inglesi Hanbury-Brown e Twiss, nel 1956. Come sorgente di luce usarono una lampada al mercurio di debole intensità<sup>21</sup>, e dei fotomoltiplicatori come rivelatori di luce. Di fronte a ciascuno di essi è, inoltre, posto un filtro a banda stretta che seleziona la riga con lunghezza d'onda 435.8 nm.

L'esito dell'esperimento per il parametro di anticorrelazione fu stupefacente:  $A = 2$ ! Cosa significa questo risultato? Chiaramente, non fornisce alcuna evidenza per la natura particellare della luce (si sarebbe dovuto ottenere:  $A = 0$ ), ma può essere spiegato alla luce dell'interpretazione classica della luce? Esploriamo questa possibilità. Abbandoniamo il concetto di fotone e pensiamo il fascio di luce semplicemente come un'onda che trasporta energia. Anche per i rivelatori adottiamo una rappresentazione completamente classica: si tratta di dispositivi che catturano e immagazzinano questa energia fino a che essa non raggiunge un certo valore, sufficiente per generare un click. All'interno di tale quadro, ciascun rivelatore sarà quindi "riempito" alla stessa velocità e, quindi, produrrà click alla stessa velocità. Se all'inizio entrambi i rivelatori non hanno alcuna energia immagazzinata, ci vorrà lo stesso tempo per riempirli e, quindi, emetteranno il loro primo click nello stesso istante, dando luogo a una coincidenza. Immediatamente dopo essi saranno vuoti e ricominceranno ad accumulare energia, fino ad emettere il loro secondo click e generare un'altra coincidenza. Chiaramente, in questo quadro, ogni evento è una coincidenza:  $N_c = N_1 = N_2$ , per cui  $A = 1/P_1$ . Poiché  $P_1 \ll 1$ , il parametro di anticorrelazione è enorme, in disaccordo con quanto osservato nell'esperimento. Possiamo, allora, immaginare che l'esperimento inizi con i rivelatori in uno stato di parziale e diverso riempimento. Non funziona: in questo caso, i click non saranno mai in coincidenza e dovremmo ottenere  $A = 0$ . Possono essere immaginate altre modifiche dello scenario classico, ma nessuna riesce a riprodurre il risultato osservato: non si è mai riusciti a fornire una spiegazione classica dell'esperimento di Hanbury-Brown e Twiss.

<sup>21</sup>Anche nel caso di fotoni, si ha una coincidenza se casualmente capita che due fotoni arrivano allo stesso istante ai rispettivi rivelatori. La probabilità di questo evento decresce con l'intensità della luce, per cui tutti gli esperimenti di questo tipo devono operare con sorgenti di luce di intensità molto bassa.

Come fatto per l'effetto fotoelettrico, passiamo a considerare, allora, uno scenario semi-classico dove la luce è descritta in termini puramente classici, ovvero come costituita esclusivamente di onde, mentre i rivelatori sono trattati come sistemi quantistici che possiedono parecchi livelli di energia: il processo di rivelazione è una transizione dallo stato fondamentale a uno di energia positiva nel continuo. In base alla (2.16), per la probabilità che un fascio luminoso di intensità  $I$  produca una transizione in un tempo  $\Delta t$  si ha:

$$P_{1,2} = \alpha_{1,2} I \Delta t, \quad (2.19)$$

con  $\alpha_{1,2}$  costante di proporzionalità caratteristica del rivelatore. Quindi:

$$P_c = \alpha_1 \alpha_2 (I \Delta t)^2 \quad (2.20)$$

per cui, risulta:

$$A = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (I \Delta t)^2}{(\alpha_1 I \Delta t)(\alpha_2 I \Delta t)} = 1, \quad (2.21)$$

in *completo disaccordo* con il risultato di Hanbury-Brown e Twiss. Nella discussione abbiamo implicitamente assunto che l'intensità del fascio luminoso fosse costante nel tempo. Questa ipotesi non è verificata per la lampada al mercurio usata da Hanbury-Brown e Twiss, per la quale il valore istantaneo di  $I$  fluttua rapidamente intorno a un certo valore medio. Per tali sorgenti, in luogo delle (2.19) e (2.20), dovremmo, più correttamente, scrivere:

$$P_{1,2} = \alpha_{1,2} \langle I \rangle \Delta t \quad P_c = \alpha_1 \alpha_2 \langle I^2 \rangle (\Delta t)^2$$

dove  $\langle \rangle$  indica la media temporale. Da ciò si ottiene:

$$A = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \langle I^2 \rangle (\Delta t)^2}{\alpha_1 \alpha_2 (\langle I \rangle \Delta t)^2} = \frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2}.$$

e, quindi, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz<sup>22</sup>

$$\langle I^2 \rangle \geq \langle I \rangle^2,$$

deduciamo che, in base alla teoria semiclassica, *il parametro di anticorrelazione per una sorgente fluttuante è sempre maggiore di 1*. Questo risultato, sebbene non spieghi l'osservazione sperimentale di Hanbury-Brown e Twiss, è in accordo con questa. In effetti, una trattazione semiclassica più approfondita fornisce  $A = 2$ , in accordo con quanto ottenuto nell'esperimento.

All'inizio degli anni '70, l'esperimento di Hanbury-Brown e Twiss fu ripetuto utilizzando come sorgente luminosa la luce emessa da un laser. Il parametro di anticorrelazione risultò essere uguale a 1, come previsto dalla teoria semiclassica (cfr. (2.21)) nel caso di sorgente costante nel tempo, qual è il laser.

<sup>22</sup>In uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare definito positivo, per il prodotto scalare di due vettori qualunque risulta:  $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ .

### 2.10.1 Fotoni

Questi esperimenti mettono in discussione la validità della Meccanica Quantistica? Dal fatto che si osserva un parametro di anticorrelazione diverso da zero è lecito dedurre che la luce non ha una natura corpuscolare?

In realtà, un'analisi più approfondita mostra che questi esperimenti, sebbene non supportino la rappresentazione della luce in termini di fotoni, nemmeno la invalidano. Il problema è nel fatto che ogni esperimento che intenda evidenziare il carattere corpuscolare della luce raggiungerà lo scopo solo se la luce impiegata è costituita da un numero ben definito di fotoni - precisamente, uno solo.

In Meccanica Quantistica, ad ogni osservabile corrisponde un operatore matematico. Gli stati quantistici (i.e., le funzioni d'onda) associati a valori definiti di un osservabile sono gli **autostati** dell'operatore associato, i.e. verificano l'equazione

$$\mathcal{A}\psi = a\psi$$

dove  $a$  è detto **autovalore** e rappresenta il valore fisico dell'osservabile. Ad esempio, le funzioni d'onda dell'atomo d'idrogeno sono gli autostati dell'operatore energia (Hamiltoniana). Negli esperimenti congegnati per stabilire l'esistenza dei fotoni, la sorgente deve produrre luce in un autostato dell'operatore **numero dei fotoni**  $\mathcal{N}$ . La luce utilizzata negli esperimenti descritti nella sezione precedente non possiede questa proprietà; essa era in uno stato quantistico risultante dalla sovrapposizione lineare di molti autostati differenti dell'operatore  $\mathcal{N}$ .

Una sorgente che genera luce in un autostato di  $\mathcal{N}$  fu realizzata per la prima volta a metà degli anni '70. Essa è costituita da atomi di calcio che, illuminati da opportuna luce laser, vengono eccitati a un livello atomico superiore, il quale decade rapidamente nello stato fondamentale di partenza emettendo, in rapida sequenza, due fotoni di energia diversa. L'esperimento di Hanbury-Brown e Twiss con questo tipo di sorgente venne realizzato da Aspect, Grangier e Roger nel 1986 (cfr Fig. 2.16). Il fotone  $\nu_1$  agisce da "trigger" del circuito di coincidenza, il quale accetta i segnali in ingresso soltanto se essi si presentano all'interno della finestra temporale rappresentata dal segnale di "gate". Tale particolare disposizione sperimentale viene realizzata per rigettare i segnali di luce casuali che incidono sui rivelatori  $R_{1,2}$ , e isolare il segnale associato ai soli fotoni  $\nu_2$  emessi dagli atomi di calcio. Inoltre, regolando opportunamente la frequenza di ripetizione dell'impulso laser che eccita questi atomi, è possibile rendere l'intervallo di tempo tra l'emissione atomica di coppie successive di fotoni  $\nu_{1,2}$  maggiore di quello richiesto a rivelatori e elettronica per elaborare l'informazione relativa al passaggio del



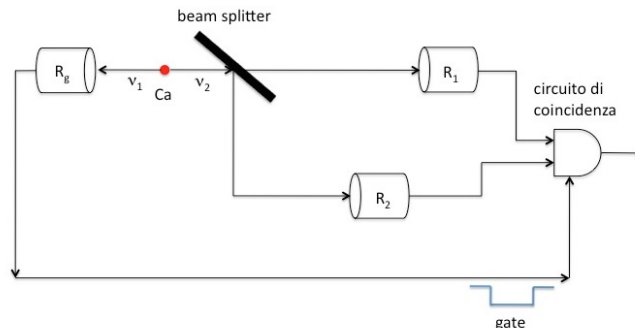


Figura 2.16: Esperimento di Aspect, Grangier e Roger. Il segnale generato dal rivelatore  $R_g$ , una volta investito da uno dei due fotoni ( $\nu_1$ ) prodotti dall'atomo di calcio, opportunamente riformato come segnale logico ("gate"), abilita il funzionamento del circuito di coincidenza al cui ingresso sono stati inviati i segnali provenienti da  $R_1$  e  $R_2$ .

fotone  $\nu_2$  attraverso l'apparato. In questo modo si è sicuri che la parte di apparato successivo al beam-splitter sia sollecitata da un fotone alla volta.

Con questo apparato Aspect, Grangier e Roger misurarono  $A = 0$ : *i fotoni esistono!*

Concludiamo questa sezione con due osservazioni. La prima è che Einstein, invece che per la rivoluzionaria teoria della Relatività, ha ricevuto il premio Nobel per un lavoro in seguito rivelatosi non completamente corretto. L'ironia è doppia se si realizza che sebbene nel modo sbagliato, questo lavoro anticipava l'idea che la dualità onda-particella potesse essere estesa anche alla luce, idea in seguito rivelatasi giusta.

L'altra osservazione ha a che fare con la natura di un fascio di luce. Molti tendono a immaginare i fotoni come i costituenti della luce: la stessa relazione esistente tra atomi e materia. Questa visione è sbagliata. Mentre il tavolo su cui state leggendo è costituito da un numero definito di atomi, lo stesso non può dirsi della luce emessa dalla lampada che illumina la stanza. Questa, come la maggior parte dei fasci luminosi, non sono composti da uno, o dieci, o un particolare numero di fotoni. Nella realtà, queste forme di luce possono essere rappresentate in termini di idee classiche combinate con trattazioni quantistiche del processo di rivelazione. La lezione più importante di questa sezione è che il concetto di fotone è ben più sottile di quanto potessimo immaginare.

### 2.10.2 Dualità onda-particella per un singolo fotone

Avendo mostrato che al beam-splitter particelle individuali provenienti dalla sorgente di calcio erano o riflesse o trasmesse, Aspect e collaboratori proseguirono la loro indagine utilizzando tali fotoni per degli esperimenti di interferenza.

Per questo tipo di esperimenti, invece dell'interferometro di Michelson-Morley risulta più conveniente usare quello detto di Mach-Zender, il cui schema è riprodotto in Fig. 2.17. L'aspetto è quello di un "quadrato" in cui i due fasci all'uscita del beam-splitter posto di fronte alla sorgente luminosa (vertice superiore sinistro del "quadrato") invece di essere riflessi da specchi finali perfettamente riflettenti e ricombinati nello stesso beam-splitter che li ha separati, come nel caso Michelson-Morley, vengono ricombinati in un beam-splitter diverso (vertice inferiore destro del "quadrato"). In questo apparato,

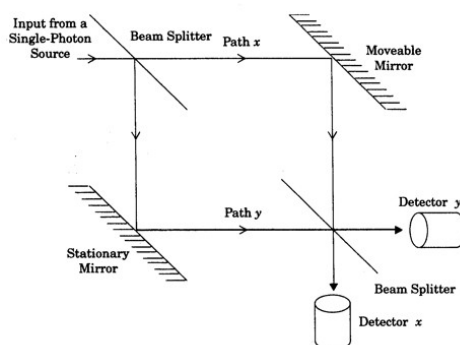


Figura 2.17: Schema di principio dell'interferometro di Mach-Zender.

l'intensità della luce che arriva ai rivelatori  $D_x$  e  $D_y$  dipende in modo critico dalle lunghezze dei due possibili percorsi che la luce può seguire a partire dal primo beam-splitter. Lo scopo dello specchio mobile nel vertice superiore destro del "quadrato" è proprio quello di variare la differenza di "cammino ottico" tra i due percorsi.

Vediamo ora cosa accade con un solo fotone nell'apparato. Poiché tra ingresso e uscita ci sono due differenti cammini a disposizione per il fotone, si può avere interferenza. Il risultato ottenuto da Aspect e collaboratori è mostrato in Fig. 2.18. Esso mostra chiaramente una figura d'interferenza al variare della differenza di cammino ottico tra i due rami dell'interferometro: il fotone, che nel caso dell'esperimento di Fig. 2.16 segue un ben preciso percorso, ora li percorre entrambi.

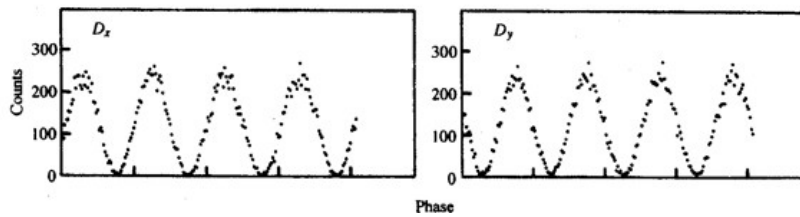


Figura 2.18: Figure d'interferenza osservate nei rivelatori dell'esperimento di Grangier, Roger e Aspect.

Un modo di interpretare i risultati fin qui esposti è quello di dire che i fotoni (così come gli elettroni, i neutroni, gli atomi ...) nel propagarsi verso un apparato di misura sono in grado di “riconoscerne” la funzione e aggiustano la loro natura di conseguenza. Se essi riconoscono che l'esperimento è in grado di dimostrare interferenza, essi divengono onde; se, invece, riconoscono un apparato in grado di stabilire quale ramo dell'interferometro segue il fotone, allora divengono particelle. Potremmo riferirci a questo punto di vista affermando che è in atto una *cospirazione* nella realtà fisica. Si può anche tentare di proporre un modello teorico per la descrizione di tale idea. Possiamo pensare che il riconoscimento dell'apparato sperimentale potrebbe coinvolgere un processo tramite il quale, ad esempio, i primi fotoni nell'interferometro creano le condizioni che determinano il comportamento di quelli successivi. È chiaro che questo punto di vista, sebbene richieda una revisione delle nostre idee classiche, non è tra i più radicali che si possano immaginare. Il problema è se questa idea è corretta, e, nel 1978, il fisico americano Wheeler propose un tipo di esperimento per sottoporla a verifica. L'esperimento è detto a **scelta ritardata**, e, realizzato in tempi recenti, ha mostrato che una revisione come quella appena descritta non è sufficiente: il tentativo della teoria della cospirazione di attenuare la portata della crisi introdotta dalla dualità onda-particella è destinato a fallire. Inoltre tale esperimento rende ancor più misteriosa la natura della luce, rendendo evidente la necessità di attuare una profonda rivoluzione nel nostro modo di immaginare i fenomeni del mondo quantistico.

### 2.10.3 Esperimenti a scelta ritardata

L'esperimento proposto da Wheeler, basato sull'interferometro Mach-Zender, è pensato per rivelare particelle o onde, ma la scelta di quale aspetto osservare è ritardata fino a dopo che il fotone ha “deciso” cosa essere. Nell'interferometro, infatti, il secondo beam-splitter può essere inserito o rimosso quando

si vuole (cfr Fig. 2.19). Immaginiamo un singolo fotone che entra nell'in-

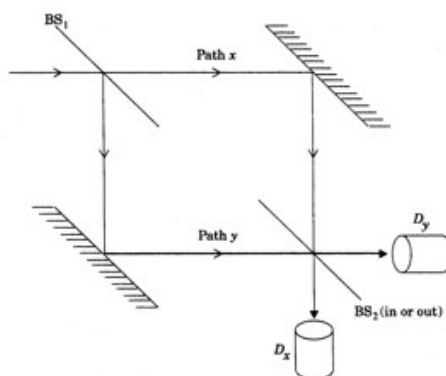


Figura 2.19: Schema di principio dell'interferometro Mach-Zender usato nell'esperimento di scelta ritardata. In questo caso entrambi gli specchi sono fissi, mentre  $BS_2$  è mobile.

terferometro tramite il primo beam-splitter ( $BS_1$ ). In assenza del secondo beam-splitter ( $BS_2$ ), i rivelatori  $D_x$  e  $D_y$  registrano quale ramo dell'interferometro è stato percorso dal fotone: se esso ha seguito il percorso  $x$ , il segnale sarà emesso da  $D_x$ ; nel caso che il fotone segua il percorso  $y$ , sarà  $D_y$  a scattare. Ma nel caso in cui  $BS_2$  è inserito, abbiamo a che fare con un esperimento d'interferenza: perdiamo qualunque informazione sul percorso seguito dal fotone, e comparirà la caratteristica figura d'interferenza.

La modifica proposta di Wheeler consiste nel ritardare la scelta se inserire o meno  $BS_2$  fino a quando il fotone è entrato, tramite  $BS_1$ , nell'interferometro. Ovvero la configurazione sperimentale è ambigua fino all'ultimo momento. In base alla teoria della cospirazione, questo inserimento/rimozione all'ultimo minuto di  $BS_2$  dovrebbe "confondere" la luce. Immaginiamo, ad esempio, che all'inizio dell'esperimento  $BS_2$  sia rimosso. Secondo la teoria della cospirazione ciò induce ciascun fotone a comportarsi come una particella e scegliere uno tra i due percorsi possibili, continuando a seguirlo anche molto dopo aver oltrepassato  $BS_1$ . La successiva inserzione di  $BS_2$  non altera questa scelta e, anche se è presente quando il fotone lo raggiunge, non può manifestarsi interferenza.

Cosa succede nella realtà? L'esperimento di Wheeler è stato realizzato, nel 1987, all'istituto Max Planck per l'Ottica Quantistica di Monaco da Hellmuth, Walther, Zajonc e Schleich. Lo schema sperimentale approntato è riportato in Fig. 2.20. Non fu possibile rimuovere fisicamente  $BS_2$  in tempi relativamente brevi, per cui si procedette a inserire lungo uno dei rami

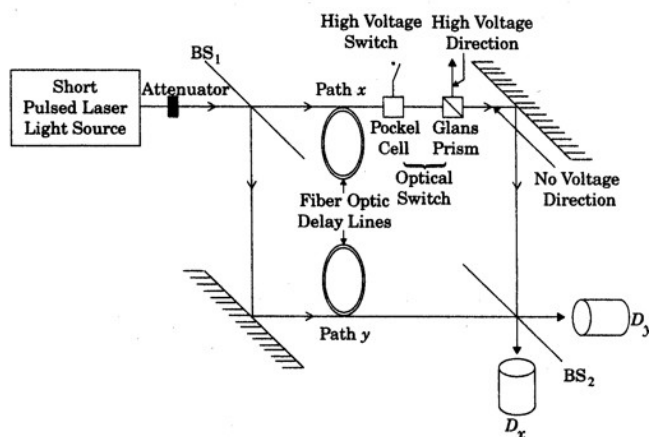


Figura 2.20: Schema dell'interferometro di Mach-Zehnder utilizzato nell'esperimento di Hellmuth et al.

dell'interferometro una sorta di “specchio elettronico”. Questo fu realizzato tramite una cella di Pockel, un dispositivo abbastanza comune in tutti i laboratori di ottica, che agisce come un interruttore che in tempi brevissimi (5 ns) è in grado, tramite l'applicazione di un campo elettrico, di commutare da aperto a chiuso. Quando il campo è applicato alla cella è come se sul ramo ci fosse uno specchio perfettamente riflettente inclinato a  $45^\circ$  che devia la luce fuori dall'interferometro, e, quindi, l'unica luce che arriva a  $BS_2$  proviene dall'altro ramo (nel caso rappresentato in figura, quello  $y$ ). Questa situazione è perfettamente equivalente all'assenza di  $BS_2$ , per cui non abbiamo interferenza. Quando il campo elettrico non è applicato la cella di Pockel è trasparente e  $BS_2$  riceve luce da entrambi i rami, e l'interferenza è possibile. Per consentire il corretto funzionamento della cella, il tempo di percorrenza del fotone nell'interferometro fu esteso a circa 30 ns inserendo in ciascun ramo una fibra ottica lunga 10 m.

Il risultato fu che non importava quando veniva inserito  $BS_2$  (cella di Pockel in condizione “chiuso”), si osservava comunque una figura d'interferenza. Viceversa, se l'esperimento cominciava con  $BS_2$  inserito, e veniva successivamente rimosso (cella di Pockel in condizione “aperto”), l'interferenza non era mai visibile. Queste osservazioni sono in accordo con quanto previsto dalla Meccanica Quantistica, e in contrasto con la teoria della cospirazione. Il fotone può passare dal percorrere un solo ramo a percorrerli entrambi in qualunque momento della sua storia: *il fotone non si confonde mai*. Anche quando l'apparato sperimentale viene cambiato “dopo che il fotone ha fatto la sua scelta”, esso fa sempre la cosa giusta!

Cosa ci dice questo risultato? Per apprezzare il significato dell'esperimento della scelta ritardata, Wheeler suggerì un *gedanken experiment* (esperimento concettuale). La proposta si basa sul fenomeno delle *lenti gravitazionali*<sup>23</sup> ed è illustrata in Fig. 2.21, dove sono rappresentate le traiettorie dei raggi di luce emessi da un quasar lontano quando una galassia, o un cluster di galassie, è presente lungo la linea di vista dalla Terra. Per semplicità, riferiamoci

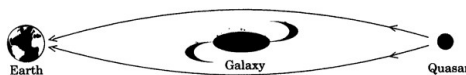


Figura 2.21: *Gedanken experiment* proposto da Wheeler.

a una situazione bidimensionale. Dal momento che esistono due possibili traiettorie che il fotone può seguire nell'andare dal quasar a noi, abbiamo un situazione analoga a quella realizzata in un interferometro. Manca soltanto di aggiungere un beam-splitter nel punto d'incontro delle due traiettorie: senza, dovremmo vedere due immagini del quasar; con il beam-splitter inserito, osserveremmo interferenza. I quasar sono a miliardi di anni-luce da noi, per cui possiamo ritardare la nostra scelta d'inserire o meno il beam-splitter fino all'ultimo momento. Le conseguenze concettuali di tale scelta ritardata sono completamente diverse. Con il beam-splitter in posizione il fotone ha viaggiato per miliardi di anni di anni su entrambi i cammini; senza beam-splitter il fotone ha seguito uno solo dei cammini: la nostra azione in questo istante sembra avere effetti sul passato cosmico.

La scelta ritardata mostra quanto fallace sia la semplice descrizione della dualità onda-particella. Una volta che la luce è nell'interferometro, non possiamo più pensarla come un'onda o una particella. Né possiamo pensare di fondere le due descrizioni in qualche strano ibrido. Tutti questi tentativi sono

<sup>23</sup>Una predizione fondamentale della Relatività Generale di Einstein è che la traiettoria della luce, in prossimità di una sorgente di campo gravitazionale, viene deviata in conseguenza della curvatura dello spaziotempo prodotta dal campo stesso. Questo comporta che i raggi di luce provenienti da una sorgente lontana che passano alle estremità opposte della massa si intersecano a una qualche grande distanza al di là di essa (cfr. Fig. 2.21). Un osservatore posto a tale grande distanza vedrà simultaneamente la sorgente in due punti distinti del cielo, ovvero vedrà due immagini della sorgente. Per i raggi deviati dal Sole, il punto più vicino nel quale questi raggi s'intersecano, e in cui le due immagini diventano visibili, è posto a circa 50 anni-luce dalla Terra, e, quindi, a noi è preclusa la possibilità di osservare alcuna immagine multipla prodotta dalla deviazione della luce nel campo gravitazionale del Sole. Possiamo invece aspettarci di vedere le immagini multiple prodotte dalla deflessione della luce nel campo gravitazionale di stelle o galassie lontane, le quali in questa circostanza agiscono da lenti gravitazionali.

inadeguati. Ciò di cui abbiamo bisogno è qualcosa di nuovo; e non un'immagine composita della luce, ottenuta cucendo insieme parti di teorie classiche. Ci serve un nuovo punto di vista, fondamentalmente diverso da tutto ciò che abbiamo elaborato nel passato dall'analisi dei fenomeni classici. Lo stesso dicasi per la materia.

Ancora una volta è bene sottolineare che la teoria dell'interferenza quantistica applicata al caso della scelta ritardata è perfettamente in accordo con i risultati sperimentali. Ciò che disturba è che ci sembra impossibile capire tali risultati. La Meccanica Quantistica evita la difficoltà rifiutandosi di fornire un'immagine (che è quello che, come retaggio della Fisica Classica, sempre ricerchiamo) di cosa realmente accade nell'esperimento della scelta ritardata. Essa non ci dice nulla circa il "meccanismo" in base al quale il fotone sceglie un cammino o entrambi. Questa richiesta da parte nostra è un residuo della concezione classica: la teoria quantistica fornisce soltanto la probabilità delle varie eventualità possibili per l'esperimento che stiamo considerando.

La teoria fa anche qualcosa di più. I calcoli dell'interferenza quantistica fanno sempre ricorso al **principio di sovrapposizione**. La teoria coinvolge sempre la somma di due o più termini, e del risultato si esegue il modulo quadro. Con questo principio entra nella Fisica qualcosa di unico. Anche una singola, indivisibile particella può essere "preparata" in una sovrapposizione di stati, e, quindi, non ha più una precisa localizzazione. In un rivelatore i fotoni, gli elettroni, appaiono sempre come semplici oggetti unitari, ma fuori dal rivelatore esattamente gli stessi oggetti sono in grado di sviluppare una forma altamente complessa. Wheeler ha descritto il quanto come il "great smoky dragon" che è presente simultaneamente in ogni angolo dell'interferometro e che improvvisamente "s'inarca per mordere il rivelatore". Forse questa è la migliore tra le descrizioni che abbiamo al momento.





## Capitolo 3

# L'interpretazione della Meccanica Quantistica

Gli aspetti paradossali della Meccanica Quantistica hanno suscitato, fin dagli inizi del secolo scorso, un intenso dibattito tra le menti illuminate del tempo. Purtroppo, la persistente “doppiezza” della natura quantistica tuttora sfugge a una interpretazione chiara ed esauriente. Nelle sezioni seguenti, illustriamo le riflessioni dei padri della Meccanica Quantistica, partendo dal più famoso confronto intellettuale del secolo scorso sugli aspetti fondativi della teoria: il dibattito Bohr-Einstein.

### 3.1 Bohr e Einstein

Bohr è il campione di quella che va sotto il nome di **interpretazione di Copenhagen**, secondo la quale, prima di essere sottoposta a un processo di misura, la particella non possiede una posizione definita; tutto ciò che possiamo ragionevolmente sperare di conoscere è la probabilità che essa si trovi in un certo punto. La particella ha una posizione definita, nel senso consueto del termine, solo nel momento in cui la “osserviamo”, prima e dopo essa ha solo posizioni potenziali. Questo non significa che la particella ha una posizione che noi non riusciamo a conoscere se non dopo averla misurata: prima che sia effettuata la misura, essa non possiede proprio una posizione definita. Questo significa che l'atto di misura partecipa profondamente alla creazione della realtà osservata.

Ogni speranza di ottenere una rappresentazione unificata della realtà oggettiva deve essere abbandonata; la teoria quantistica fornisce predizioni circa i risultati di una misura, ma, contrariamente alle precedenti teorie, non fornisce una descrizione di “come la natura determina” il risultato stesso. Secondo

il grande fisico danese, la stessa volontà di ricercare una tale descrizione è sbagliata e ingenua. Tutta la comprensione umana si esplica in termini di concetti classici modellati sull'esperienza diretta, ma il mondo quantistico è non-classico e non può essere compreso nei vecchi termini, nemmeno in linea di principio.

Einstein, pur essendone uno dei fondatori, fin dall'inizio prova disagio con gli sviluppi della Meccanica Quantistica. In particolare, prova un'avversione profonda per i salti quantici. Non poteva essere diversamente per il padre della Relatività: un evento non può essere influenzato da eventi da cui risulta separato per un intervallo di tipo spazio. Se seguiamo l'interpretazione di Copenhagen, poiché la funzione d'onda di una particella evolve nel tempo espandendosi su distanze arbitrariamente grandi, siamo costretti ad ammettere che l'osservazione della particella in un determinato punto determina una variazione *istantanea* della funzione d'onda in tutto lo spazio, in modo da impedire che altri osservatori, arbitrariamente lontani, possano osservare la particella nelle loro posizioni. Questo comporta necessariamente l'esistenza di una misteriosa azione a distanza, in stridente violazione con la località alla base della teoria della Relatività Speciale.

Questa azione a distanza svanisce se si rinuncia alla convinzione che la funzione d'onda fornisca una descrizione completa dello stato della particella e si ammette che essa possiede una posizione reale in tutti gli istanti di tempo. In realtà, ogni volta che cerchiamo di stabilire dove si trova la particella la troviamo sempre in una posizione definita. Quindi, cosa c'è di più naturale che attendersi che una particella fosse prima localizzata nel punto in cui viene trovata l'attimo dopo? È per questo che Einstein ritiene che la funzione d'onda è solo un surrogato temporaneo di una (ancora ignota) descrizione più precisa in grado di prevedere con esattezza la posizione della particella. Una conoscenza più approfondita della fisica dovrebbe fornirci questa informazione senza far uso della probabilità, che è l'elemento veramente più difficile da accettare: con le parole di Einstein, “... *credete veramente che la Luna non si trovi lassù se nessuno la guarda?*”.

Einstein ritiene che la Meccanica Quantistica rinunci a quello che è sempre stato lo scopo della scienza: la descrizione completa del mondo reale (supposto esistere indipendentemente da qualsiasi atto di osservazione). Questa idea ha comportato l'elaborazione di nuovi concetti per corrispondere con quella realtà, e così idee scientifiche quali forza, energia e impulso sono emerse nel corso di decenni di dibattito. Esse corrispondono a importanti proprietà del mondo fisico e, per tale ragione, possono essere utilizzate in modo produttivo per comprenderlo. Secondo Bohr, invece, questa tradizione deve essere abbandonata.

Il punto di vista attuale (condiviso) è che l'universo quantistico implica una revisione radicale della nostra concezione del mondo fisico, revisione finora non raggiunta.

Einstein non perse mai l'occasione di manifestare pubblicamente la sua insoddisfazione nei confronti della teoria, e le sue discussioni (confronti) con Bohr rappresentano uno degli eventi leggendari nelle cronache della Fisica moderna.

Appena un mese dopo la conferenza di Como del 1927, dove Bohr aveva formalizzato l'interpretazione di Copenhagen, si svolse a Bruxelles il memorabile V Congresso Solvay, che vide la partecipazione di tutti migliori fisici del tempo (vedi Fig. 1.7 di capitolo 1).

Secondo la testimonianza di Otto Stern, ogni giorno "... *Einstein scendeva a colazione ed esprimeva i suoi timori circa la nuova teoria quantistica; ogni volta aveva inventato un certo esperimento dal quale si evinceva che la teoria non funzionava ... Pauli e Heisenberg, che erano lì, non prestavano molta attenzione - "tutto si sistemerà". Bohr, invece, rifletteva con cura sulla cosa e, a cena, ci chiariva la materia in dettaglio*".

Uno dei timori mattutini di Einstein riguardava l'esperimento delle due fenditure, che propose di modificare rendendo mobile lo schermo su cui sono incise (vedi Fig. 3.2). Perché la particella possa arrivare nel punto P, nell'oltrepassare lo schermo essa deve aver ricevuto una spinta verso l'alto, e quindi lo schermo deve rinculare verso il basso. Per una particella che giunge in P passando per la fenditura inferiore, la componente dell'impulso lungo la direzione parallela allo schermo è maggiore di quella ricevuta da una particella che giunga in P attraversando la fenditura superiore. Per cui, il rinculo dello schermo sarà più grande nel caso in cui la particella attraversi la fenditura superiore. La proposta di



Figura 3.1: Bohr e Einstein.

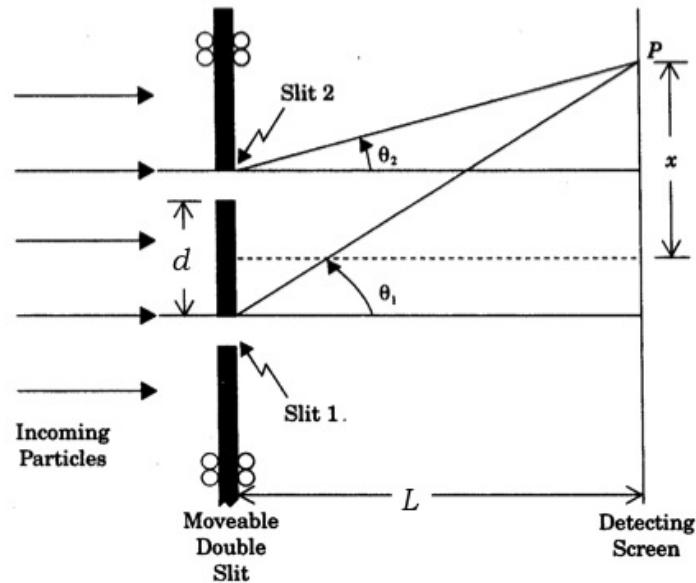


Figura 3.2: Esperimento delle due fenditure proposto da Einstein. Nella figura, per facilità di lettura, l'ampiezza degli angoli  $\theta_{1,2}$  è stata esagerata.

Einstein era, semplicemente, di osservare il moto dello schermo dopo che la particella lo aveva oltrepassato: da quanto rapidamente esso si muove si può dedurre per quale fenditura è passata la particella. Tutto ciò mantenendo sullo schermo di rivelazione la figura d'interferenza.

Alcune semplici considerazioni di Bohr mostrarono chiaramente la fallacia di questo argomento. Infatti, se la particella passa per la fenditura inferiore (indicata con 1 in Fig. 3.2), l'impulso ricevuto dallo schermo mobile è (in modulo):

$$P(1) = P \sin \theta_1 \simeq P \theta_1.$$

Analogamente, se la particella passa per la fenditura superiore (indicata con 2 in Fig. 3.2), lo schermo rincula con impulso (in modulo):

$$P(2) = P \sin \theta_2 \simeq P \theta_2.$$

(In entrambi i casi, abbiamo assunto che gli angoli di deflessione  $\theta_{1,2}$  siano piccoli). Se vogliamo determinare per quale fenditura è passata la particella, dobbiamo misurare l'impulso dello schermo con un'accuratezza migliore di:

$$\Delta P < P(1) - P(2) \simeq P(\theta_1 - \theta_2).$$

Quindi, in base al Principio d'Indeterminazione, la posizione della fenditura risulterà incerta di

$$\Delta x > \frac{h}{\Delta P} \simeq \frac{h}{P(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (3.1)$$

Dalla Fig. 3.2 è facile vedere che risulta:

$$\frac{x + d/2}{L} = \tan \theta_1 \simeq \theta_1 \quad \frac{x - d/2}{L} = \tan \theta_2 \simeq \theta_2$$

per cui:

$$\theta_1 - \theta_2 \simeq \frac{d}{L}$$

che inserita nella (3.1), e tenendo conto della relazione di de Broglie, fornisce:

$$\Delta x > \frac{h}{P} \frac{L}{d} = \frac{\lambda L}{d}.$$

Ma, nella figura d'interferenza,  $\lambda L/d$  è proprio la distanza tra due massimi<sup>1</sup>. Quindi, l'incertezza nella posizione delle fenditure è esattamente sufficiente a cancellare la figura d'interferenza. Ovvero, rendere mobile lo schermo contenente le fenditure - operazione essenziale ai fini della misura del rinculo, e, quindi, ottenere l'informazione circa il percorso seguita dalla particella -, porta a una incertezza nella posizione delle fenditure sufficiente a cancellare la figura d'interferenza: il Principio d'Indeterminazione è salvo.

Al VI Meeting Solvay, tenuto a Bruxelles nel 1930, Einstein presentò un nuovo argomento, questa volta contro la relazione d'indeterminazione energia-tempo:  $\Delta E \Delta t > \hbar$ .

<sup>1</sup>Nella figura d'interferenza da due fenditure, la condizione di massimo è ( $\theta \ll 1$ ):

$$\frac{d}{\lambda} \sin \theta \simeq \frac{d}{\lambda} \theta = m \quad (m \in \mathbb{N}).$$

La distanza angolare,  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ , tra due massimi consecutivi ( $m_1$  e  $m_2 = m_1 + 1$ ) verifica, quindi, la condizione

$$\frac{d}{\lambda} \Delta\theta = 1$$

i.e.

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{d},$$

a cui, indicando con  $L$  la distanza del piano delle fenditure dallo schermo rivelatore, corrisponde una distanza spaziale pari a:

$$\Delta x = L \Delta\theta = \frac{\lambda L}{d}.$$

Immaginiamo una scatola a pareti perfettamente riflettenti, sospesa nel campo gravitazionale terrestre e all'interno della quale è intrappolata una certa quantità di luce che contribuisce al peso complessivo della scatola tramite la famosissima relazione  $E = mc^2$ . (Ad esempio,  $10^6$  fotoni con lunghezza d'onda nella parte visibile dello spettro danno un contributo di circa  $10^{-30}$  kg: circa la massa dell'elettrone). La scatola è attaccata ad un dinamometro (cfr. Fig. 3.3) ed equipaggiata con una apertura azionata da un orologio. Ad un dato istante, noto con precisione arbitraria, dall'apertura emerge un singolo fotone. Noi possiamo misurare il peso della scatola con un'accuratezza arbitraria, e quindi determinare esattamente l'energia del fotone  $e$ , tramite, l'orologio stabilire precisamente l'istante della sua emissione. *Tutto ciò in evidente contrasto con la relazione d'indeterminazione energia-tempo.*

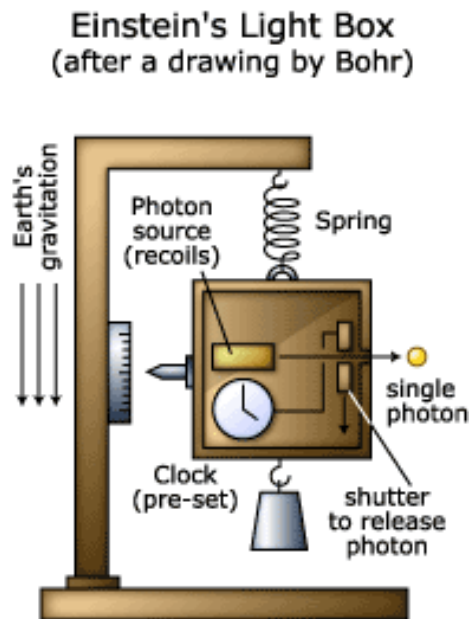


Figura 3.3: Gedanken-experiment proposto da Einstein nel 1930.

Quando Einstein illustrò questo argomento, Bohr non riuscì a trovare alcuna falla nel ragionamento. Per tutta la sera si aggirò nella sala dove si teneva la conferenza tentando di convincere i suoi colleghi che non poteva essere vero: se Einstein fosse stato nel giusto, sarebbe stata la fine della Fisica. Dopo una notte passata a ragionare su come controbattere, il panico di Bohr si dissolse quando si rese conto che l'orologio usato per determinare l'istante di

emissione del fotone è, tramite il principio d'equivalenza, sensibile alla sua posizione nel campo gravitazionale terrestre.

Nell'apparato concepito da Einstein, la forza di gravità  $mg$  agente sulla scatola è controbilanciata da quella, diretta in verso contrario,  $kz$  esercitata dalla molla. Per misurare l'energia del fotone emesso aumentiamo la massa sospesa in modo da azzerare la lancetta: il peso da aggiungere eguaglia l'energia del fotone emesso. Questa procedura comporta una misura della posizione della scatola (allineamento della lancetta solidale alla scatola con lo zero della scala graduata posta sull'asta di sostegno). Poiché è valido il principio d'indeterminazione di Heisenberg (quello posizione-impulso), il meglio che possiamo fare per l'incertezza sull'impulso è:

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta z} \quad (3.2)$$

dove  $\Delta z$  è l'accuratezza con cui azzeriamo la lancetta. Questa incertezza nell'impulso implica che la scatola potrebbe avere un impulso pari a  $\Delta p$ , senza che ciò sia rivelato dall'osservatore. Un impulso diverso da zero sarebbe causato da un errore  $\Delta m$  nella massa che dobbiamo aggiungere alla scatola per riportare la lancetta sullo zero della scala graduata, che, a sua volta, si traduce in uno sbilanciamento di forza

$$\Delta F = g \Delta m$$

nel campo gravitazionale terrestre. Questa forza agisce per la durata  $T$  della misura (il tempo che impiega la lancetta a ritornare sullo zero), per cui

$$\Delta p = T \Delta F = g T \Delta m ,$$

da cui, si ottiene:

$$\Delta m = \frac{\Delta p}{g T}$$

In base alla relazione massa-energia di Einstein, otteniamo un'incertezza per l'energia del fotone

$$\Delta E = \frac{c^2 \Delta p}{g T}$$

ovvero, in base alla (3.2)

$$\Delta E = \frac{\hbar c^2}{g T \Delta z}. \quad (3.3)$$

Uno dei risultati fondamentali della Relatività Generale è che il ritmo di un orologio dipende dalla sua posizione in un campo gravitazionale. Per cui,

una incertezza nella conoscenza della posizione della scatola si riflette in una incertezza nella durata  $T$  della misura della posizione data da:

$$\Delta T = T g \frac{\Delta z}{c^2}$$

da cui:

$$T = \frac{c^2 \Delta T}{g \Delta z}$$

che sostituita nella (3.3), fornisce:

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta T}$$

i.e., la relazione d'incertezza energia-tempo.

In conclusione, Bohr vince anche il secondo round. Questa volta, però, il successo è ancora più eclatante: ha mostrato che nel suo argomentare Einstein ha trascurato la Relatività Generale!

Comunque, Einstein non demorde e, come discuteremo ampiamente nel capitolo 4, cinque anni dopo lancia una nuova sfida, mettendo definitivamente all'angolo Bohr e innescando una riflessione sui fondamenti della Meccanica Quantistica che è tuttora in corso.

### 3.2 Schrödinger, von Neumann e Wigner

Secondo Schrödinger, un altro dei giganti della Meccanica Quantistica, l'aspetto più insoddisfacente dell'interpretazione di Copenhagen è la suddivisione che essa opera del mondo in sistemi quantistici (elettroni, fotoni, atomi, ...) e sistemi classici (rivelatori, indici di scale graduate, ...) e il ruolo del processo di misura, quindi dell'osservatore. Il problema per Schrödinger è che ogni cosa è quantistica. A dispetto dell'apparente solidità del mondo che ci circonda, ogni cosa è fatta di atomi, ovvero elettroni, protoni e neutroni - quindi, onde-particelle -, ovvero sistemi quantistici che non obbediscono alle leggi di Newton. Perché dovremmo suddividere il mondo in oggetti classici e oggetti quantistici? Come può un osservatore, che è pur sempre fatto di atomi, stare al di fuori del sistema, per eseguire la misura?

Nel tentativo di rispondere a questi quesiti, Schrödinger era disposto a sacrificare il suo (mitico) gatto per la causa della scienza. Egli descrisse la situazione con quello che in seguito divenne noto come *paradosso del gatto di Schrödinger* (Fig. 3.4). Un gatto è rinchiuso in una camera d'acciaio all'interno della quale è posto il seguente, diabolico, dispositivo: in un contatore Geiger è posta una piccolissima quantità di una sostanza radioattiva, così



poca che in un'ora decade, forse, un solo nucleo, ma con eguale probabilità, può accadere, forse, che non ne decada alcuno. Se il nucleo decade, viene azionato un dispositivo che rilascia un martello il quale, a sua volta, colpisce una piccola bottiglia contenente acido cianidrico. Se l'intero sistema è lasciato a se stesso per un'ora, potremmo dire che il gatto è ancora in vita se, nel frattempo, nessun nucleo è decaduto. Il primo decadimento dovrebbe avvelenarlo. La funzione d'onda  $\Psi$  dell'intero sistema deve esprimere ciò contemplando in essa entrambe i due stati - gatto vivo e gatto morto -, mescolati in egual parte:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(\text{gatto vivo}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(\text{gatto morto}). \quad (3.4)$$

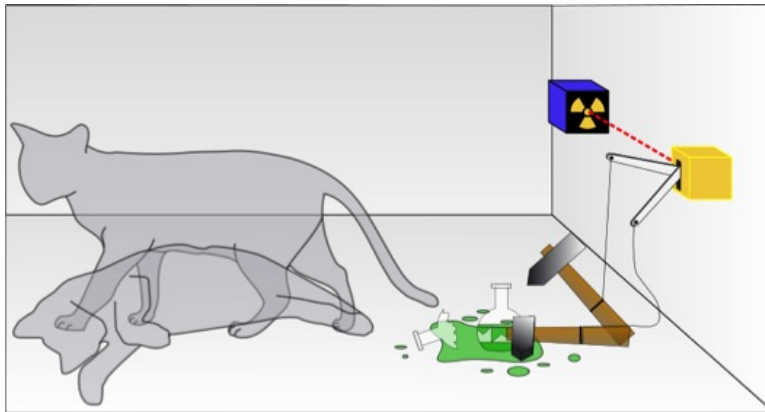


Figura 3.4: Illustrazione del paradosso del gatto di Schrödinger.

In altre parole, fino a quando, trascorsa un'ora, non apriamo la camera e osserviamo il gatto, la Meccanica Quantistica sembra asserire che esso si trova in uno stato di sovrapposizione quantistica. Noi non riusciamo a immaginarci come degli oggetti classici possano essere in una sovrapposizione di due stati differenti allo stesso tempo. È possibile che la Meccanica Quantistica affermi che è l'atto di osservare il gatto che causa alla sua funzione d'onda (3.4) di collassare in una delle due alternative: vita o morte?

I fisici von Neumann e Wigner, due tra coloro che hanno maggiormente contribuito all'elaborazione della struttura matematica della Meccanica Quantistica, erano seriamente preoccupati da questo problema. Essi, alla fine, elaborarono l'idea che la coscienza dell'osservatore dovesse giocare un ruolo chiave nel collasso della funzione d'onda. Questo ci porta, immediatamente, in acque più profonde. Cosa succede se costruiamo una seconda scatola

d'acciaio e la colleghiamo a quella contenente il gatto tramite una finestra trasparente? Se lasciamo "l'amico di Wigner" seduto dentro la seconda scatola a osservare il gatto per un'ora, possiamo chiedergli se il gatto è morto quando è decaduto il nucleo o quando abbiamo aperto la scatola per guardare. O la misura e il collasso sono avvenuti prima poiché l'amico di Wigner stava guardando? Se l'unico aspetto non-quantistico del mondo è la coscienza, perché differenti osservatori concordano sulla stessa rappresentazione del mondo? Nessuna meraviglia che Einstein chiedesse se la Luna è lì nel cielo anche quando non c'è nessuno a guardarla!

Sono state proposte varie idee che tentano di risolvere il problema della misura. La sezione seguente è dedicata alla descrizione della più audace e immaginativa: l'interpretazione a *molti mondi*.

### 3.3 Molti mondi

L'interpretazione della Meccanica Quantistica che va sotto il nome di **molti mondi** fu proposta da Hugh Everett nella sua tesi di dottorato del 1957. Everett era studente di Wheeler a Princeton. Quando sottopose la prima stesura della sua tesi a Wheeler, questi, pur ritenendo che la tesi contenesse un'idea originale, la considerò scarsamente comprensibile e suggerì al giovane studente di accompagnarla con un articolo che la rendesse più digeribile per la commissione esaminatrice<sup>2</sup>. L'idea di Everett ricevette scarsissima attenzione fin quando, dieci anni dopo, Bryce De Witt<sup>3</sup>, un collega di Wheeler, non la ritenne meritevole di attenzione e la ridiscusse in un articolo.

Nell'interpretazione di Copenhagen, quando un osservatore usa degli apparati classici per sottoporre a misurazione una certa sovrapposizione quantistica, soltanto uno dei possibili esiti è effettivamente realizzato. Il misterioso processo di misura, in qualche modo, fa collassare la funzione d'onda nello stato effettivamente osservato. Everett e De Witt rimuovono il problema in modo semplice e audace: nessun esito potenziale rimane tale e la funzione d'onda non collassa; tutti gli esiti potenziali contenuti in una funzione d'onda sono realizzati, ma ciascuno in una diversa copia dell'universo, a sé stante. Inoltre, secondo De Witt, ciascuna di tali copie è essa stessa costantemente soggetta a moltiplicazione in corrispondenza di ogni processo di misura: "*ogni transizione quantistica che ha luogo su ciascuna stella, in ciascuna galassia, in ogni remoto angolo dell'universo, frammenta il nostro mondo locale in miriadi di sue copie*". In questa rappresentazione non si ha alcun collasso della funzione d'onda: l'universo viene sostituito da un *multiverso* di universi paralleli.

<sup>2</sup>L'articolo uscì nel 1957 sulla prestigiosa rivista americana *Review of Modern Physics*.

<sup>3</sup>A lui si deve il nome con cui ci riferiamo a questa interpretazione.

L'idea è affascinante ma non priva di problemi. Innanzitutto, si è costretti a supporre che i vari universi non possano comunicare tra loro (dove è la copia dell'universo dove ho deciso di non scrivere questa pagina?), per cui non è chiaro che esista un qualche modo per sottoporre a verifica l'idea di Everett. Una soluzione al problema della misura che non genera alcuna nuova predizione e che non può essere verificata, appare priva di contenuto. Anche Wheeler, che è sempre stato pronto ad abbracciare nuove idee, purché affascinanti, fu costretto ad ammettere che il punto di vista di Everett offriva soltanto dei nuovi spunti di riflessione.

Ci possono essere anche alcuni problemi nell'elaborare una formulazione dettagliata della teoria. Feynman, ad esempio, era preoccupato circa il fatto che in ognuno dei diversi universi ci fosse, presumibilmente, una copia di noi stessi. Ognuno di noi sa in quale modo il mondo si è diviso per cui ci è possibile seguire la traccia del nostro passato. Quando facciamo un'osservazione di questa traccia, il risultato è "reale" nello stesso modo in cui lo sarebbe se l'osservazione fosse seguita da un osservatore "esterno"? Inoltre, sebbene possiamo considerare noi stessi osservatori esterni quando guardiamo al resto del mondo, il resto del mondo include osservatori che osservano noi. Saremo sempre in accordo su ciò che vediamo? Feynman conclude queste speculazioni dicendo che sono molto ardite e che otterremo poco profitto dal continuare a discuterle.

Anche Bell, di cui molto sentiremo parlare nel capitolo successivo, era preoccupato dalle implicazioni della interpretazione a molti mondi. Everett e De Witt si riferiscono alla diramazione della funzione d'onda in molti differenti universi come alla formazione di una struttura ad albero: il futuro di un dato ramo è incerto, ma non il suo passato. Secondo Bell, in questa interpretazione non c'è associazione del particolare presente con alcun particolare passato. Non esistono, quindi, traiettorie e la configurazione del mondo, compresi noi, cambia in modo totalmente discontinuo. Come è, allora, che noi, invece, abbiamo l'illusione che il mondo cambi in modo continuo? Per Bell questa continuità deriva dalle nostre memorie, che sono un fenomeno del presente, e paragona questa situazione al punto di vista secondo il quale la Terra fu creata nel 4004 a.C. La crescente evidenza che la Terra si è formata ben prima di tale data non costituisce alcun problema per i fondamentalisti: il creatore - nel 4004 a.C - ha predisposto le cose in modo che il mondo ci apparisse più antico: gli alberi furono creati con gli anelli e le rocce con già all'interno i fossili di creature che non sono mai vissute<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Di fatto questo modo di pensare è ancora presente e forte in certi ambiti. Alcuni l'hanno esteso all'intero universo, che sarebbe stato creato preinvecchiato. Ovviamente non c'è modo di confutare questo punto di vista.

Della teoria di Everett, Bell dice che “*qualora fosse presa sul serio sarebbe difficile prendere sul serio qualsiasi altra cosa*”.

A dispetto di queste e altre osservazioni, l'interpretazione a molti mondi esercita ancora molta attrazione. Nel tempo ha conquistato i favori anche di importanti filosofi e fisici, quali, ad esempio, David Deutsch e Stephen Hawking. Il primo ha proposto una variante della teoria in cui il numero dei mondi, sebbene molto grande, non cresce continuamente. Egli crede anche che la teoria possa essere sottoposta a verifica. Il suo test prevede un esperimento d'interferenza quantistica in cui due stati quantistici evolvono separatamente per un certo tempo e poi si ricombinano. Un cervello artificiale, dotato di una sorta di memoria quantistica microscopica, osserva il sistema e lo divide in due copie che esistono in mondi differenti. Il test si basa sull'osservare un fenomeno d'interferenza nella mente di questo osservatore artificiale.

Concludiamo questa breve discussione sull'interpretazione a molti mondi, accennando a un aspetto particolarmente controverso della teoria. La definizione del concetto di probabilità in un contesto che implica un numero infinito di copie di ciascun osservatore, le cui osservazioni si suppone siano soggette a tali probabilità, comporta non pochi problemi tecnici. Se un osservatore è veramente una delle tante copie, quale senso possiamo attribuire all'affermazione che esso ha una determinata probabilità di osservare questo o quel risultato? Chi è veramente questo “osservatore”? Ogni sua copia rileva con certezza (i.e., con probabilità 1) qualsiasi risultato destinato allo specifico universo in cui si trova. Quindi, nell'interpretazione a molti mondi l'intera ottica probabilistica deve essere esaminata con grande attenzione.

### 3.4 La teoria della decoerenza

Un tentativo di risolvere il problema della misura prende il nome di **decoerenza**. In questo approccio si parte dall'osservazione che i sistemi quantistici non possono mai essere totalmente isolati dall'ambiente esterno. Nella realtà, la “coerenza” di uno stato quantistico, ovvero le relazioni di fase tra le differenti componenti di una sovrapposizione quantistica, risente delle interazioni con il resto del mondo esterno al sistema. Secondo i proponenti di tale punto di vista (il più eminente è Wojceh Zurek), tali interazioni tra sistema e ambiente inducono delle variazioni casuali nelle fasi delle varie componenti di una sovrapposizione quantistica, eliminando gli effetti di interferenza. A supporto di questa idea, vengono sempre citati gli esperimenti di Haroche<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>Premio Nobel per la Fisica nel 2012 per lo sviluppo delle tecniche sperimentali necessarie per realizzare questo tipo di esperimenti.

e Raimond. In uno degli esperimenti, il sistema quantistico consiste di un atomo che può essere preparato in una sovrapposizione di due stati diversi. Lo stato quantistico dell'atomo viene misurato ponendo l'atomo stesso all'interno di una cavità e usando il campo elettromagnetico all'interno di essa come rivelatore classico. Si realizza, quindi, una situazione del tipo "gatto di Schrödinger". Come sfuggiamo al paradosso di Schrödinger? Secondo la teoria della decoerenza, dobbiamo includere nell'analisi di questo esperimento l'inevitabile accoppiamento del rivelatore all'ambiente. La cavità è sottoposta al bombardamento continuo e casuale di fotoni, molecole d'aria, etc. di cui risulta composto l'ambiente. La modellizzazione di questo processo casuale come un terzo sistema quantistico, mostra che tutte le informazioni circa la relazione di fase tra i due stati atomici iniziali e il rivelatore sono rapidamente persi. Per gli usuali campi classici all'interno della cavità questa decoerenza è prevista realizzarsi in un tempo brevissimo. Nel caso di campi in cavità composti di pochi fotoni, Haroche e Raimond sono stati in grado di osservare e misurare il tempo di decoerenza del sistema. Hanno fatto ciò immettendo un secondo atomo all'interno della cavità a istanti successivi a quello in cui è immesso il primo e misurando l'entità degli effetti d'interferenza che dipendono dalla coerenza della funzione d'onda del primo atomo. Osservando quanto velocemente questi effetti d'interferenza degradano al variare del ritardo tra gli attraversamenti della cavità da parte dei due atomi, Haroche e Raimond dichiarano di aver colto la decoerenza in azione.

Il problema di Einstein con la Luna può essere spiegato utilizzando l'idea di decoerenza. La Luna non è un sistema inerte: non solo le sue molecole interagiscono costantemente tra loro, ma anche la sua superficie è sottoposta al costante bombardamento di particelle e radiazioni provenienti dal Sole. La coerenza di un qualunque stato del tipo "gatto di Schrödinger" che coinvolge la Luna verrebbe rapidamente distrutto da tali interazioni. In base ad argomenti di coerenza di questo tipo, possiamo essere sicuri che la Luna è realmente lì anche quando nessuno la guarda. Il bombardamento solare è, a tutti gli effetti, un processo di misura e distrugge qualunque coerenza quantistica.



# Capitolo 4

## L'articolo EPR

Cinque anni dopo la disfatta di Bruxelles, Einstein lancia una nuova sfida, pubblicando, insieme a Boris Podolski e Nathan Rosen, un articolo (cfr. Fig. 4.1) che in seguito diverrà famoso, dalle iniziali degli autori, con il nome di **EPR**. L'intenzione che anima gli autori dell'articolo è quella di sostenere l'esistenza di una *realtà obiettiva*, indipendente dalla misura. Einstein è ancora convinto che la Meccanica Quantistica fornisca una descrizione incompleta del mondo microscopico e che la probabilità intervenga nella descrizione solo in conseguenza della nostra limitata conoscenza.

MAY 15, 1935

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 47

### Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

Figura 4.1: L'articolo di Einstein, Podolski e Rosen, comparso nel volume 47 (maggio 1935) della rivista americana *Physical Review*.

Le caratteristiche fondamentali che qualunque teoria fisica deve soddisfare perché risulti essere una teoria di successo sono la *correttezza* e la *completezza*. La correttezza di una teoria è giudicata in base al grado di accordo tra le

conclusioni che essa raggiunge e le osservazioni sperimentali. Da questo punto di vista, la Meccanica Quantistica è una teoria corretta: nessun conflitto è stato (ancora) evidenziato tra le misure di laboratorio e le sue predizioni. Circa la completezza, la condizione che l'assicura è che a ciascun "elemento della realtà" fisica corrisponda una controparte nella teoria fisica. Nell'articolo EPR<sup>1</sup> non viene fatto alcun tentativo di definire il concetto di realtà (tentativo da cui, nel passato, nessuno era uscito indenne); viene definito soltanto un criterio "sufficiente" e "ragionevole" per individuare un elemento di realtà: "*se, senza disturbare in alcun modo un sistema, possiamo predire con certezza (i.e., con probabilità 1) il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a tale quantità*". Lo scopo di Einstein e collaboratori è quello di confutare la tesi di Bohr circa lo status della teoria, dimostrando che esistono oggettivi "elementi della realtà" che la teoria non coglie.

Secondo il Principio d'Indeterminazione, posizione e impulso di una particella sono grandezza incompatibili: una misura che fornisca un valore esatto per, ad esempio, l'impulso, esclude la conoscenza simultanea della posizione della particella. Questo significa che la particella non ha una posizione definita? La risposta di Bohr è affermativa; Einstein e collaboratori si propongono di dimostrare, invece, che la posizione è un elemento di realtà che non trova posto nella teoria, la quale, pertanto, è incompleta<sup>2</sup>.

Nell'articolo viene proposto un *gedanken experiment* in cui due particelle, A e B, dopo aver brevemente interagito, si allontanano in direzione opposte. Se misuriamo esattamente la posizione della particella A, determiniamo, con esattezza e simultaneamente, la posizione della particella B. Questa conoscenza è ottenuta indirettamente, senza perturbare minimamente B stessa. Secondo il criterio di realtà di EPR, la posizione di B deve essere un elemento della realtà fisica: dato che non abbiamo minimamente interferito con la particella B, la sua posizione doveva essere quella anche prima del nostro intervento. Avremmo potuto, però, scegliere di misurare la velocità della particella A. In tal caso, avremmo stabilito indirettamente la velocità di quella B, senza alterarla. Ancora una volta, dato che non abbiamo fatto assolutamente nulla alla particella B, possiamo concludere che la sua velocità era la stessa già prima. Mettendo insieme le due misure - quella effettuata e quella che avremmo potuto effettuare - EPR concludono che la particella B ha posizione e velocità definite in qualsiasi momento.

---

<sup>1</sup>Nel seguito, utilizzeremo questo acronimo per riferirci sia all'articolo che ai suoi autori.

<sup>2</sup>È come se, avendo scovato un libro tra gli scaffali della biblioteca, vi venisse impedito di prenderlo in prestito semplicemente perché il libro non risulta nel catalogo: il libro appartiene alla biblioteca, per cui l'unica spiegazione è che il catalogo (la descrizione della biblioteca) è incompleto.



---

Se misuriamo la posizione, alteriamo la velocità e viceversa. Se non conosciamo entrambe le proprietà della particella A, non conosciamo nemmeno quelle di B, per cui non abbiamo alcun conflitto con il Principio d'Indeterminazione. EPR ammettono di non poter misurare simultaneamente la posizione e la velocità di una particella. Ciò nonostante (e questo è un punto fondamentale), anche senza stabilire posizione e velocità di entrambe le particelle, il ragionamento di EPR dimostra che ognuna ha una posizione e velocità definite. Per loro è una questione di realtà: una teoria non può dirsi completa se non è in grado di descrivere tutti gli elementi di realtà. Questa, secondo EPR, è qualcosa di più dei dati letti sui rivelatori, o della somma di tutte le osservazioni effettuate in un dato momento: quando nessuno “guarda la Luna”, questa è comunque parte della realtà.

L'argomentazione di EPR si basa su un presupposto importante: se in un determinato momento possiamo determinare la proprietà di un oggetto A conducendo una misura su un altro oggetto B spazialmente distante dal primo, allora A ha la proprietà in questione. Il fondamento logico di questo assunto è nel **Principio di Località**: possiamo influenzare in modo diretto solo le cose che ci sono vicine, ovvero, sono possibili solo azioni *locali*. Questa idea trae origine dalla constatazione che se la misurazione di A è in grado d'influencare B, ciò non può che avvenire con un ritardo almeno uguale al tempo impiegato dalla luce a coprire la distanza tra A e B. È opportuno osservare che tale principio è tacitamente assunto nella descrizione dell'esperimento delle due fenditure; se rinunciamo alla località e contempliamo la possibilità che chiudendo una fenditura possiamo alterare i cammini degli elettroni che attraversano l'altra, non siamo più costretti a concludere che gli elettroni possono essere in due posti distinti nello stesso istante.

Nell'esperimento EPR, le due particelle sono esaminate allo stesso istante, per cui ciò che apprendiamo su B quando osserviamo A deve essere posseduto da B in modo del tutto indipendente dal fatto che la misurazione venga effettuata. In altre parole, EPR sostengono che un oggetto A non risente in alcun modo di ciò che facciamo ad un oggetto B spazialmente separato da A. L'alternativa - secondo EPR - sarebbe di rendere la realtà della particella B dipendente dal processo di misura eseguito su quella A. Anche se non la escludono logicamente, EPR disdegnano questa non-località e suggeriscono, invece, l'incompletezza della Meccanica Quantistica.

Il paradosso scompare se la Meccanica Quantistica viene integrata con delle **variabili nascoste**, il cui valore è predeterminato. Nel caso dell'esperimento EPR, tali variabili aggiuntive corrisponderebbero alle posizioni e agli impulsi delle particelle, per cui le correlazioni tra le due particelle sarebbero analoghe a quelle esibite da molti sistemi classici, ovvero, in ultima analisi, derivanti

dalla comune origine dei due oggetti<sup>3</sup>. Qualora fosse possibile misurare il valore di queste variabili nascoste si riuscirebbe a predire il risultato di un certo esperimento con certezza. *Nella Meccanica Quantistica tali variabili sono inaccessibili all'osservazione.*

La conclusione dell'articolo EPR è all'insegna dell'ottimismo: *Sebbene abbiamo mostrato che la funzione d'onda non fornisce una descrizione completa della realtà fisica, riteniamo aperta la questione se tale descrizione esista o meno. Crediamo, però, che tale teoria sia possibile.*

Nello stesso numero della rivista, e con lo stesso titolo, apparvero anche le considerazioni di Bohr circa i problemi sollevati da EPR. La risposta di Bohr è di difficile lettura<sup>4</sup>. Per gran parte del suo articolo, il grande fisico danese semplicemente ignora la configurazione sperimentale proposta da EPR e reitera la sua difesa vecchio stile della consistenza della Meccanica Quantistica, in cui l'attacco di Einstein viene sventato invocando il disturbo sul sistema da parte dell'apparato di misura. Nel caso dell'esperimento proposto da EPR, tali argomenti, però, sono irrilevanti poiché l'apparato utilizzato per la particella A non può in alcun modo disturbare fisicamente quello che misura la particella B. Quando, alla fine, passa a considerare l'esperimento EPR, Bohr s'impegna a provare la consistenza della Meccanica Quantistica, proprietà garantita dall'impossibilità di eseguire simultaneamente le misure di posizione e impulso. Tutto ciò, però, è inutile in quanto EPR non pongono la questione della consistenza della Meccanica Quantistica, ma della sua completezza.

## 4.1 EPR nella versione di Bohm

Qui descriviamo la versione moderna del *gedanken experiment* proposto nell'articolo EPR, elaborata da David Bohm nel 1951. In essa, un atomo a riposo è stimolato a emettere simultaneamente due fotoni, che, per la conservazione

<sup>3</sup>Un semplice esperimento dovrebbe chiarire la natura di queste correlazioni classiche. Immaginate di comprare una coppia di guanti, e di confezionare con ciascuno di essi due regali da inviare a due vostri amici, uno a Singapore e l'altro a New York. Se vi accordate affinché i pacchi vengano aperti allo stesso istante, è evidente che se l'amico di Singapore trova un guanto destro immediatamente apprende che il vostro amico a New York ha trovato il guanto sinistro. In ciò non ravvisiamo alcuna violazione della località, semplicemente la conseguenza della natura dei guanti: uno è destro e l'altro è sinistro. La stessa correlazione si presenta nel caso di due gemelli omozigoti. Essendo dotati dello stesso DNA, è evidente che se "misuriamo" il colore degli occhi di uno, sappiamo immediatamente anche il colore degli occhi dell'altro.

<sup>4</sup>Tale risultato anche ai sostenitori dell'interpretazione di Copenaghen. Lo stesso Bohr, quattordici anni dopo, rileggendo l'articolo, constatò una certa "inefficacia" del suo modo di esprimersi.

dell'impulso, si propagano in direzioni opposte. Gli stati di polarizzazione di polarizzazione dei due fotoni sono misurati tramite dei filtri polaroid, che possono essere anche a grande distanza tra loro (vedi Fig. 4.2)<sup>5</sup> Si osserva il

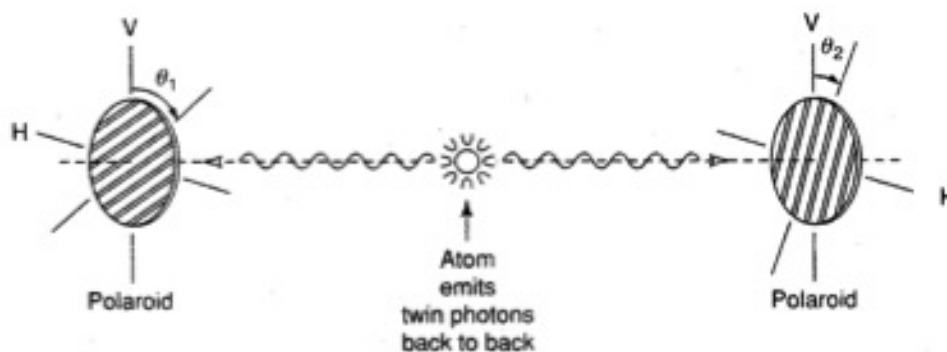


Figura 4.2: La versione di Bohm dell'esperimento EPR.

seguinte comportamento:

- se i due polaroid sono entrambi con gli assi in direzione verticale (V), entrambi i fotoni li attraversano;
- se i due polaroid sono entrambi con gli assi in direzione orizzontale (O), entrambi i fotoni li attraversano;
- se l'asse di uno dei polaroid è nella direzione V e quello dell'altro nella direzione O, non rileviamo mai entrambe i fotoni oltre i polaroid.

Ovvero, si osservano solo coppie VV e OO, mai VO e OV! Questo significa che la misura della polarizzazione di uno dei fotoni consente di misurare quella dell'altro. Dato che la misura di un fotone non influenza l'altro fotone, questo deve aver sempre avuto la polarizzazione appena rivelata: tutto quello che abbiamo fatto è stato di misurarla, seppure indirettamente. Inoltre dato che avremmo potuto di scegliere di effettuare la misura lungo qualsiasi asse, la stessa conclusione si applica sempre: il fotone che si muove verso sinistra presenta una polarizzazione definita lungo ogni asse, anche se noi siamo in grado di determinarla per un solo asse alla volta. Naturalmente, i ruoli dei

<sup>5</sup>Sebbene inizialmente proposto come esperimento ideale, in questa versione l'esperimento è stato effettivamente realizzato.

due fotoni possono essere scambiati, il che ci porta a concludere che ciascun fotone ha una polarizzazione definita lungo qualsiasi asse.

Anche se la Meccanica Quantistica dimostra che le particelle acquisiscono in modo casuale una data proprietà quando eseguiamo una misura, sappiamo che tale casualità può avere delle correlazioni spaziali. Coppie di particelle adeguatamente preparate, **entangled**<sup>6</sup>, non acquisiscono le loro proprietà in modo indipendente: sono “dadi” che, lanciati in due luoghi diversi, segnano punteggi casuali ma identici. Le particelle entangled, anche se spazialmente distanti, non si comportano autonomamente l’una dall’altra: l’atto di misurare la polarizzazione di uno dei due fotoni “obbliga” l’altro, eventualmente lontano anni-luce, ad abbandonare il limbo probabilistico e assumere la stessa polarizzazione.

Secondo Einstein questi risultati indicano chiaramente che gli stati di polarizzazione dei fotoni devono essere stati, in qualche modo, predeterminati alla loro origine - le variabili nascoste -, e, quindi, nessuna sorpresa se misurato un fotone nello stato V, anche l’altro risulta in V. Una qualunque spiegazione alternativa non può che far ricorso a una “azione istantanea a distanza” (l’azione fantasma, nelle parole di Einstein) tra i fotoni, in grado di fissare la polarizzazione del secondo fotone non appena viene misurata quella del primo. Un’interazione che si propaga istantaneamente è in palese contrasto con la Relatività Speciale: la velocità massima di propagazione di un segnale è quella della luce. Torneremo a riflettere su questo punto nelle sezioni seguenti.

#### 4.1.1 EPR secondo la Meccanica Quantistica

Nella versione di Bohm dell’esperimento EPR, ciascun fotone viene creato in una sovrapposizione di stati di V e O. La misura della polarizzazione di uno dei fotoni determina il collasso della sua funzione d’onda su tutto lo spazio. Se, ad esempio, la polarizzazione del fotone di destra risulta essere O, si azzerà all’istante la polarizzazione alternativa V. Dato che il collasso avviene

---

<sup>6</sup>Il termine tedesco *Verschränkung*, più tardi tradotto in inglese con *entanglement*, fu utilizzato per la prima volta da Schrödinger in una lettera inviata a Einstein, subito dopo la pubblicazione dell’articolo EPR, in cui si complimentava con lui “... per aver messo alle strette la meccanica quantistica dogmatica”. Nella sua analisi dell’esperimento EPR, Schrödinger sostiene che dopo l’interazione, invece di due sistemi a una particella, ci sia solamente un unico sistema a due particelle, e che pertanto qualunque cambiamento nello stato di una particella influenza l’altra, nonostante la distanza che le separa. Negli ultimi anni, il termine *entanglement* è diventato virale, ed è utilizzato spesso a sproposito. In realtà, il termine sta ad indicare quella particolare condizione dei sistemi composti per i quali solo lo stato del sistema complessivo è noto, mentre nulla si può dire sullo stato delle sue parti.

ovunque, interessa anche il punto in cui si trova il fotone che si muove verso sinistra: si azzerava la componente  $V$  della sua funzione d'onda. Malgrado la distanza tra i due fotoni, la funzione d'onda del fotone che si muove verso sinistra risente istantaneamente di qualsiasi cambiamento in quella del fotone che si muove verso destra.

Secondo la Meccanica Quantistica, dunque, questa variazione istantanea della funzione d'onda causa un'influenza che si trasmette a velocità superiore a quella della luce. Siamo costretti ad ammettere che l'ipotesi del collasso, sebbene molto utile per giustificare i risultati sperimentali, è impossibile da dedurre dall'apparato matematico della teoria: è un processo che deve essere introdotto come ipotesi aggiuntiva. Questa strategia solleva non pochi dubbi. Infatti, com'è possibile che quando eseguiamo una misura su un elettrone in un acceleratore come DAFNE ne azzeriamo istantaneamente la funzione d'onda sulla Luna? Certamente quando troviamo l'elettrone in DAFNE sappiamo che questo non può trovarsi sulla Luna, ma con quali meccanismi ciò avviene? In che modo la parte della funzione d'onda che si trova sulla Luna "apprende" che deve azzerarsi all'istante.

È lecito chiedersi: com'è possibile che il collasso avvenga istantaneamente? Non è un'idea in conflitto con la Relatività Speciale? Se le funzioni d'onda fossero come le onde d'acqua, la risposta sarebbe indubbiamente positiva. Ma, obiettano da Copenhagen, le funzioni d'onda non sono come onde d'acqua. Anche se descrive la materia, la funzione d'onda non è un'entità materiale e, quindi, la barriera imposta dalla velocità della luce non agisce. Se la funzione d'onda collassa in DAFNE, un osservatore sulla Luna non riuscirà, con probabilità uguale a uno, a rivelare l'elettrone. Niente sulla Luna indica la variazione improvvisa della funzione d'onda associata con la rivelazione dell'elettrone in DAFNE. Fintanto che l'elettrone non si sposterà con velocità maggiore di quella della luce, non si avrà alcun conflitto con la Relatività Speciale.

### 4.1.2 EPR e la Relatività Speciale

Torniamo al nostro esperimento EPR. Quando si misura la polarizzazione dei due fotoni, tra questi non viene scambiata alcuna informazione. Per ogni fotone che giunge al polaroid c'è un'uguale probabilità che esso lo oltrepassi o meno, per cui il risultato dell'esperimento sono due sequenze, una per ciascun rivelatore, di 0 e 1. Non è assolutamente possibile prevedere l'esito di una misura: in queste due serie casuali di dati non è nascosta alcuna informazione di sorta, ma sono identiche e di ciò ce ne accorgiamo solo confrontandole. E il confronto deve essere necessariamente fatto con mezzi convenzionali (telefono, fax, e-mail), ovvero più lenti della luce. Quindi, sebbene sembra che

la misura della polarizzazione di un fotone influenzi istantaneamente quella dell'altro, nessuna informazione viene scambiata tra i due: la Relatività Speciale è salva.

Si tratta di un argomento soddisfacente? Per molti, sì. Altri, invece, hanno la sensazione che ci sia ben altro sotto. Resta il fatto che due particelle distinte, soggette alla casualità della Meccanica Quantistica, si mantengono in un certo qual modo in contatto, legate tra loro, tanto che qualsiasi cosa faccia la prima, la seconda la imita. Ciò sembra la prova lampante che qualcosa più veloce della luce è in grado di agire tra loro, quella azione a distanza che tanto infastidiva Einstein.

Chi ha ragione? Non esiste consenso sulla risposta. Secondo alcuni fisici e filosofi occorre rivedere l'intero dibattito, a loro giudizio fino adesso basato su presupposti sbagliati. Secondo alcuni il vero cuore della questione non è tanto che la luce imponga un limite alla velocità di propagazione dell'informazione, quanto il secondo postulato della Relatività Speciale, ovvero che la velocità della luce sia qualcosa su cui tutti gli osservatori, indipendentemente dal loro stato di moto, concordano. Essi sottolineano che, al momento, non c'è consenso unanime sul fatto che realmente disponiamo di una descrizione pienamente convincente del processo di misura che sia invariante per trasformazioni di Lorentz. Secondo questa linea di pensiero, nel momento in cui si riuscisse a elaborare questa descrizione, sparirebbe qualunque conflitto con la Relatività Speciale.

## Capitolo 5

# La disuguaglianza di Bell

Nel 1964 le argomentazioni di EPR vennero sottoposte a nuova analisi da parte di John Bell.

Abbiamo visto che l'“istantaneo collasso della conoscenza” che si verifica in sistemi classici correlati (i guanti, i gemelli omozigoti), non presenta alcun aspetto misterioso. Quello che ha dimostrato Bell è che la Meccanica Quantistica predice un grado di correlazione maggiore di quello insito nelle correlazioni classiche predeterminate. Ciò è stato ottenuto derivando una disuguaglianza per le correlazioni originate dalle condizioni classiche che è violata nel caso delle correlazioni predette dalla Meccanica Quantistica. L'esistenza di tale disuguaglianza ha consentito ai fisici di verificare se la natura segue le predizioni della teoria quantistica, con i suoi effetti apparentemente superluminali, oppure la teoria deterministica a variabili nascoste proposta da Einstein.

La disuguaglianza di Bell può essere ricavata soltanto utilizzando il sofisticato formalismo matematico della Meccanica Quantistica. Qui presenteremo soltanto una dimostrazione intuitiva che segue una linea proposta da Bell stesso in una delle sue lezioni divulgative sull'argomento<sup>1</sup>.

Ritorniamo alla versione di Bohm dell'esperimento EPR, presentata nel cap. 4, e concentriamoci sul numero  $N$  di coppie di fotoni la cui polarizzazione è in disaccordo, ovvero i casi in cui uno dei fotoni oltrepassa il polaroid e l'altro no. Finora abbiamo considerato dei polaroid perfettamente allineati. Consideriamo ora il caso di polaroid i cui assi principali<sup>2</sup> sono allineati lungo direzioni diverse da quella verticale, e indichiamo con  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , rispettivamente, gli angoli di rotazione degli assi dei due polaroid. Ci aspettiamo che il numero

---

<sup>1</sup>Una trattazione più dettagliata, ma, ovviamente, meno “divulgativa”, è nel libro *Dicibile e indicibile in Meccanica Quantistica*, Adelphi (2010).

<sup>2</sup>L'asse principale giace sul piano di polarizzazione del polaroid e risulta ortogonale al suo all'asse ottico.

dei disaccordi sia funzione di questi angoli di rotazione, e disponiamoci a studiare il comportamento della funzione  $N(\theta_1, \theta_2)$ .

Quando  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  (Fig. 5.1), abbiamo accordo perfetto: non si osservano casi dove un fotone della coppia oltrepassa un polaroid e l'altro no. Quindi, risulta:

$$N(0, 0) = 0$$

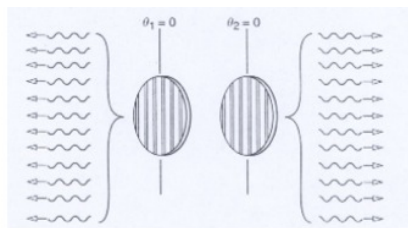


Figura 5.1: Caso di polaroid allineati, con assi principali lungo la verticale.

Vediamo cosa succede quando ruotiamo l'asse principale di uno, o entrambi, i polaroid. Immaginiamo, con Einstein, che la coppia di fotoni venga emessa con le polarizzazioni parallele, quindi che abbiamo a che fare con una situazione predeterminata all'origine come nel caso delle correlazioni classiche. Ricordando che l'ipotesi implicita in tali ragionamenti è che ciò che accade a un polaroid non influenza ciò che accade all'altro, quando ciascun fotone giunge al corrispondente polaroid assumiamo che i fotoni si comportino in accordo con la Meccanica Quantistica, ovvero che oltrepassino o meno il polaroid con una probabilità<sup>3</sup> data dal quadrato del coseno dell'angolo

<sup>3</sup>Secondo l'elettrodinamica classica, il destino di un raggio luminoso che incide su un polaroid dipende dalla polarizzazione del raggio: esso passa indisturbato il, o viene assorbito dal, polaroid a seconda che la sua polarizzazione sia perpendicolare o parallela all'asse principale del polaroid; se la polarizzazione è, invece, inclinata di un angolo  $\alpha$  rispetto a tale asse, solo una frazione  $\cos^2 \alpha$  (legge di Malus) del raggio emerge dal polaroid. E in termini di fotoni? Un fascio di una certa polarizzazione lineare va immaginato come costituito da fotoni ciascuno con quella polarizzazione. Questo modello descrive correttamente la situazione nel caso di polarizzazione perpendicolare e parallela all'asse principale: il fotone perpendicolare passa, quello parallelo è assorbito. La stessa semplicità non si ha nel caso di un raggio la cui polarizzazione sia inclinata rispetto all'asse principale del polaroid: cosa accade ai fotoni di questo tipo? Il modo più ovvio per capirlo è ripetere l'esperimento con un raggio costituito da un solo fotone. Cosa osserveremo? Qualche volta un fotone della stessa energia di quello incidente e polarizzato perpendicolarmente all'asse principale emerge dal polaroid; qualche volta non troveremo nulla. Mai, ma proprio mai, dal polaroid emergerà una parte di fotone. Ripetendo  $N \gg 1$  volte l'esperimento, troveremo il fotone oltre il polaroid  $N \cos^2 \alpha$  volte. Ovvero, il fotone ha una probabilità  $\cos^2 \alpha$  di emergere



d'inclinazione  $\theta$  dell'asse rispetto alla verticale.

Consideriamo il caso di 12 coppie di fotoni, originate nella configurazione VV. Se ruotiamo di 30 gradi, verso destra, il polaroid 2 (cfr Fig. 5.2), il numero di fotoni che oltrepassano il polaroid 2 è dato da:

$$12 \times (\cos 30)^2 = 12 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9,$$

per cui, dal momento che tutti i fotoni che giungono sul polaroid 1 passano,

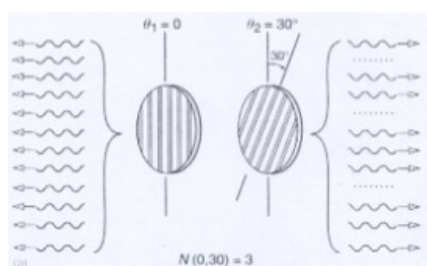


Figura 5.2: Caso  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 30^\circ$ .

avremo tre di coppie in disaccordo, ovvero:

$$N(0, 30) = 12 \times (\sin 30)^2 = 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3.$$

Lo stesso accade se è il polaroid 1 ad essere ruotato di 30 gradi verso sinistra, ovvero:

$$N(-30, 0) = N(0, 30) = 3.$$

dal polaroid, con polarizzazione perpendicolare all'asse ottico, e, quindi, una probabilità  $1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$  di essere assorbito. Questi valori di probabilità sono alla base del risultato che si osserva per un raggio classico, ovvero contenente un gran numero di fotoni. La Meccanica Quantistica interpreta il risultato dell'esperimento con un singolo fotone alla luce del *principio di sovrapposizione*. La funzione d'onda del fotone con polarizzazione inclinata rispetto all'asse ottico è:

$$\Psi = (\cos^2 \alpha) \psi_{\perp} + (\sin^2 \alpha) \psi_{\parallel}.$$

Quando lo facciamo incidere sul polaroid, lo sottoponiamo ad osservazione, il cui effetto è quello di costringere il fotone interamente nello stato di polarizzazione perpendicolare o in quello di polarizzazione parallela. In quale dei due collasserà la funzione d'onda non può essere previsto in anticipo, poiché il fenomeno è regolato da leggi probabilistiche: se collassa nello stato  $\psi_{\parallel}$ , viene assorbito; se collassa in  $\psi_{\perp}$ , attraversa indisturbato il polaroid, conservando la sua polarizzazione.

Consideriamo ora il caso in cui entrambi i polaroid sono ruotati. Ad esempio, il primo di 30 gradi verso sinistra e l'altro di 30 gradi verso destra. Come prima, il polaroid di destra ferma tre fotoni, e lo stesso fa quello di sinistra. Le misure sono assunte probabilistiche, per cui i fotoni assorbiti possono appartenere alla stessa coppia o a coppie diverse. Se l'assorbimento avviene sempre per coppie diverse, avremo il numero massimo di disaccordi: sei; se gli assorbimenti avvengono per fotoni della stessa coppia, il numero di disaccordi è minimo, ovvero zero (cfr. Fig. 5.3). È evidente che sussistono situazioni

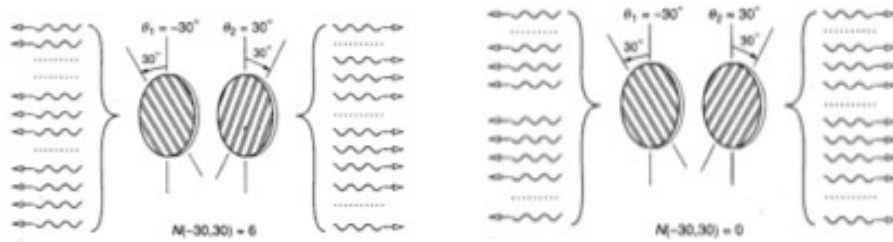


Figura 5.3: Caso  $\theta_1 = -30^\circ$ ,  $\theta_2 = 30^\circ$  con fotoni assorbiti appartenenti a coppie diverse (sinistra), e alla stessa coppia (destra).

intermedie tra questi due estremi, per cui possiamo affermare che in questa configurazione vale la seguente disuguaglianza:

$$N(-30, 30) \leq N(-30, 0) + N(0, 30), \quad (5.1)$$

che prende il nome di **disuguaglianza di Bell**.

Sorprendentemente, *la Meccanica Quantistica viola questa disuguaglianza*. Nel caso considerato, la Meccanica Quantistica non predetermina la direzione della polarizzazione, per cui abbiamo:

$$N(-30, 30) \propto (\sin 60)^\2 = \frac{3}{4} \quad N(-30, 0) + N(0, 30) \propto 2 \times (\sin 30)^\2 = \frac{1}{2}$$

in evidente contrasto con la (5.1).

Una serie di esperimenti volti a misurare queste correlazioni EPR furono eseguiti dal gruppo di Alain Aspect tra la fine degli anni '70 e l'inizio degli anni '80. Questi esperimenti hanno confermato che la disuguaglianza di Bell è violata e che le predizioni della Meccanica Quantistica sono in accordo con i dati sperimentali. Sebbene questi esperimenti non riproducessero perfettamente tutte le condizioni dell'esperimento EPR - i polaroid reali hanno un'efficienza di rivelazione minore di 1 -, tutti sono d'accordo nel sostenere che la Meccanica Quantistica ha passato in modo convincente la prova dei fatti.

La violazione della disuguaglianza di Bell osservata negli esperimenti, sta a significare che nessuna teoria a variabili nascoste (senza un'esplicita o implicita, spiacevole, "azione a distanza") può riprodurre la realtà sperimentale. Sebbene Einstein avrebbe certamente preferito una teoria a variabili nascoste per il mondo microscopico, avrebbe sicuramente rifiutato di accettare l'esistenza di un'azione a distanza.

Gli esperimenti di Aspect dimostrano che un'azione svolta in un certo luogo può, in certe condizioni, essere correlata a un evento che si svolge a distanza senza che ci sia contatto tra questi due luoghi. Sebbene sconcertante (Einstein lo definì sovranaturale), il fenomeno è coerente con le leggi della Meccanica Quantistica e, infatti, fu previsto teoricamente ben prima dell'avvento delle tecnologie necessarie per verificarlo sperimentalmente. Teoria ed esperimento corroborano la conclusione che l'Universo ammette l'esistenza di *interconnessioni non-locali*: qualcosa che accade qui può essere correlato con qualcosa che accade laggiù, anche se non c'è nulla che si sposti da qui a lì, anche se non c'è abbastanza tempo perché la luce si propaghi tra i due punti.

Questo significa che *lo spazio non può più essere concepito come in passato*: qualunque sia la distanza interposta, essa non garantisce che i due corpi siano distinti, dato che per la Meccanica Quantistica tra i due potrebbe esserci una sorta di legame. Secondo la teoria quantistica, la connessione può permanere anche se le due particelle si trovano agli estremi opposti dell'Universo. Dal punto di vista della loro correlazione è come se fossero l'una accanto all'altra: lo spazio tra loro non conta. Queste correlazioni sono di natura diversa da quelle classiche: le correlazioni quantistiche si riferiscono a "quanti quantistici", ovvero, quanti che "scelgono" casualmente se essere destro o sinistro e, nonostante ciò, lavorano in coppia: se uno "sceglie" di essere destro, l'altro è, immancabilmente, sinistro.