



Relatività

Danilo Babusci

danilo.babusci@Inf.infn.it

IdFM - *Incontri di Fisica Moderna nei Licei Scientifici 2015-16*

Teoria della Relatività: rapporto esistente tra le descrizioni dei fenomeni fisici fornite da osservatori diversi

✓ **Relatività Speciale (RS):** osservatori inerziali

- si applica a fenomeni di natura diversa
- introduce cinematica e dinamica più generali di quelle newtoniane, valide anche ad alte velocità
- linguaggio ordinario della fisica nucleare e subnucleare e dell'astrofisica

NB - moti accelerati sono descritti dalla **RS** !

- ✓ **Relatività Generale (RG): tutti gli osservatori**, anche quelli accelerati o soggetti a gravità
 - teoria di campo dell'interazione gravitazionale
 - stabilisce rapporto dinamico tra geometria e fisica
 - fondamento della cosmologia (studio dell'universo nella sua globalità)

Differenza fondamentale :

- **RS** → spaziotempo **piatto**
- **RG** → spaziotempo **curvo**

Relatività = **teoria fisica** dello **spazio** e del **tempo**

RS

A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*,
Annalen der Physik **17**, 891 (1905)

radice estetica della RS: asimmetria nella descrizione fornita da osservatori diversi della interazione magnete-conduttore



carica nel conduttore soggetta a forza di Lorentz, che **non compie lavoro**

campo elettrico generato dal moto del magnete → cariche soggette a forza, **che compie lavoro**

... ma entrambi misurano la stessa corrente → fisica non dipende dal riferimento, ma solo dalla velocità relativa

Origine del problema: eq.ni di Maxwell sono incompatibili con le trasformazioni Galileiane della meccanica

(Complementi 3.1)

Soluzione del problema coinvolge l'idea stessa di **tempo**,
“... il tempo non è definito in assoluto, [esiste] connessione inscindibile fra tempo e velocità dei segnali” (Einstein)

Riflessione sul concetto di tempo e sulla sua misura rappresenta la **seconda radice** della RS

NB – il salto dall'elettromagnetismo alla definizione operativa del tempo è un vero colpo di genio: solo Einstein ...

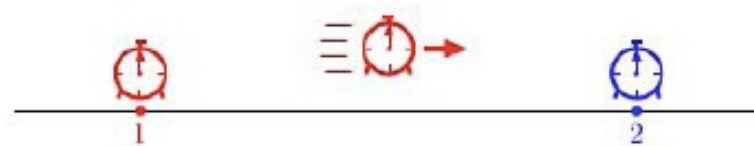
Sistemi di Riferimento

Sistema di Riferimento: qualunque oggetto materiale cui sono associati una terna di assi e un sistema di orologi identici e sincronizzati posti in ogni punto dello spazio

NB - un orologio in ogni punto? Sì: studio del moto comporta misure temporali effettuate in punti diversi nello spazio

Sincronizzazione di due orologi (identici): come fare?

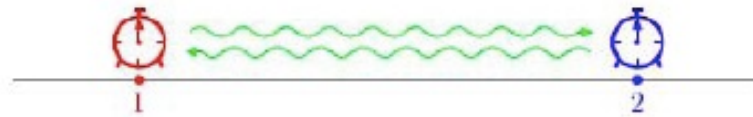
- terzo orologio, inizialmente sincronizzato con quello in 1, trasportato da 1 a 2



problema: a priori, nulla garantisce che il trasporto non influenzi l'orologio

Sistemi di Riferimento

- scambio di segnali tra 1 e 2



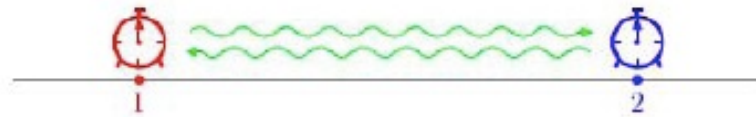
problema: facile applicazione solo con segnali che si propagano con velocità ∞ : tutto è istantaneo!

uso di **segnali luminosi**: velocità di propagazione finita \rightarrow necessaria convenzione: tempo richiesto per $1 \rightarrow 2 =$ a quello per $2 \rightarrow 1$

NB – asserzione non verificabile: definizione operativa di tempo; controllo validità: consistenza logica e controllo sperimentale della teoria risultante

Sistemi di Riferimento

procedura di Einstein:



$$\text{dist}(1,2) = L$$

- 1** invia segnale luminoso al tempo t
- quando riceve segnale, **2** imposta $t + L/c$ sul proprio orologio
- 2** reinvia il segnale; **1** controlla che arrivi quando il suo orologio segna $t + 2(L/c)$

NB – procedura equivalente: sorgente luminosa in $L/2$: all'arrivo del segnale, ciascun osservatore imposta $t = L/(2c)$ sul proprio orologio (l'arrivo in **1** e **2** sono, per definizione, eventi simultanei)

Meccanica Newtoniana

Dipendenza del moto di un oggetto dal particolare sistema di riferimento in cui esso è osservato → rispetto a quale riferimento sono valide le leggi della meccanica?

Newton: le leggi della dinamica valgono nello **spazio assoluto**
“... sempre uguale e immobile e senza alcuna relazione con alcunché di esterno”

concetto necessario? **NO:** per dare fondamento alle leggi della dinamica è sufficiente ammettere l'esistenza di classe particolare di sistemi di riferimento, quelli **inerziali** (RI), in cui ogni corpo libero è in quiete o in moto rettilineo uniforme (r.u.)

→ 1^a legge diventa un postulato (**principio d'inerzia**) che afferma esistenza dei RI: è in essi che vale “ $F = m a$ ”

Riferimenti Inerziali

Definizione meno banale di quanto si pensi: due versioni

- Supponiamo che nell'universo ci siano dei corpi sui quali non agisce alcuna forza → o sono in quiete oppure sono in moto r. u.: riferimenti solidali a questi corpi sono inerziali

Introduce nozioni dinamiche, i.e., presume la nozione di forza; inoltre assume esistenza nell'universo di corpi in moto inerziale

- Riferimento solidale a un corpo in quiete o in moto r. u., i.e., in moto inerziale

Forse, **più corretta**: no postulazione dinamica, ma non affronta il problema della natura del riferimento rispetto al quale la proprietà di essere inerziale si può attribuire

Riferimenti Inerziali

Domanda: quanti riferimenti inerziali esistono?

riferimento inerziale $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ in moto r. u. rispetto a \mathcal{K} :
trasformazione di Galilei

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \quad t' = t$$

→

| | |
|---------------------------------|--|
| moto r.u. in \mathcal{K} : | $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{u}t$ |
| rimane r.u. in \mathcal{K}' : | $\vec{x}'(t') = \vec{x}_0 + (\vec{u} - \vec{v})t'$ |

una volta individuato un RI, ve ne sono infiniti altri: tutti i riferimenti in moto r.u. rispetto al primo → insieme ∞ di RI rimpiazza spazio assoluto di Newton

Relatività Galileiana

Domanda: posso individuare il RI in cui mi trovo?

NON con le leggi della meccanica: queste hanno la stessa forma (i.e., sono **covarianti**) in tutti i RI (**Principio di Relatività**)

NB – così non fosse, avremmo ∞ descrizioni diverse del mondo a seconda del RI utilizzato per descriverlo

più precisamente: **tutti i RI sono fisicamente equivalenti**, i.e., risultati degli esperimenti non dipendono dal RI in cui vengono osservati

covarianza ottenibile introducendo parametri addizionali dipendenti dalle velocità relative dei RI \rightarrow possibilità di distinguerli; **PR**: covarianza delle leggi + loro indipendenza da grandezze cinematiche caratteristiche dei singoli RI (i.e., impossibile determinare velocità relativa dei RI)

Relatività Galileiana

Individuazione delle trasformazioni di coordinate spazio-temporali per il passaggio da un RI ad un altro → ulteriore postulato che coinvolge (+ o – direttamente) il tempo

Supponendo che il tempo sia assoluto, le trasformazioni che legano i RI tra loro sono quelle galileiane →

Principio di Relatività Galileiano: le leggi della meccanica sono covarianti rispetto alle trasformazioni di Galilei

PRG non deriva dalle leggi della dinamica: non possiamo dedurlo da “ $F = m a$ ”. Al contrario, esso consente di limitare la forma delle eq.ni del moto: non le determina, ma elimina possibilità inammissibili.

PRG è una **meta-legge**: regola la struttura delle leggi, agendo, quindi, come un **principio di simmetria**

Relatività Galileiana

Esempio – interazione tra due particelle regolata da legge del tipo:

$$\vec{F} = k \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 + \vec{x}_2|^3}$$

i.e., in un dato RI \mathcal{K} :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = k \frac{\vec{x}_1 + \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 + \vec{x}_2|^3}$$

passaggio in RI $\mathcal{K}' \rightarrow$ trasf. Galileiana con velocità \vec{v}

\longrightarrow

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}'_1}{dt^2} = k \frac{\vec{x}'_1 + \vec{x}'_2 + 2\vec{v}t}{|\vec{x}'_1 + \vec{x}'_2 + 2\vec{v}t|^3}$$

dipende da $\vec{v} \rightarrow$ non ammissibile in base al PRG

diviene ammissibile con la sostituzione: $+$ \rightarrow $-$

\longrightarrow forza di gravità $(k = G m_1 m_2)$

Trasformazioni di Galilei

Ipotesi

- trasformazione lineare (r.u. in \mathcal{K} appare r.u. in \mathcal{K}')
- consistente con PR
- il tempo è assoluto



$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \quad t' = t$$



- derivando rispetto al tempo una volta: $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$
- derivando rispetto al tempo due volte: $\vec{a}' = \vec{a}$ (★)

NB - (★) \rightarrow 2^a legge di Newton invariante per trasf. Galileiane? **NO!**
“ $F = m a$ ” non è ben definita finché non specifico F come funzione di x & v della particella; a priori NON è detto che questa funzione mantenga la stessa forma passando da un RI a un altro

Elettromagnetismo

Equazioni di **Maxwell** (nel vuoto e in assenza di sorgenti):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

→ equazione delle onde:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{V}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{V}}}{\partial t^2} = 0 \quad (\vec{\mathcal{V}} \equiv \vec{E}, \vec{B})$$

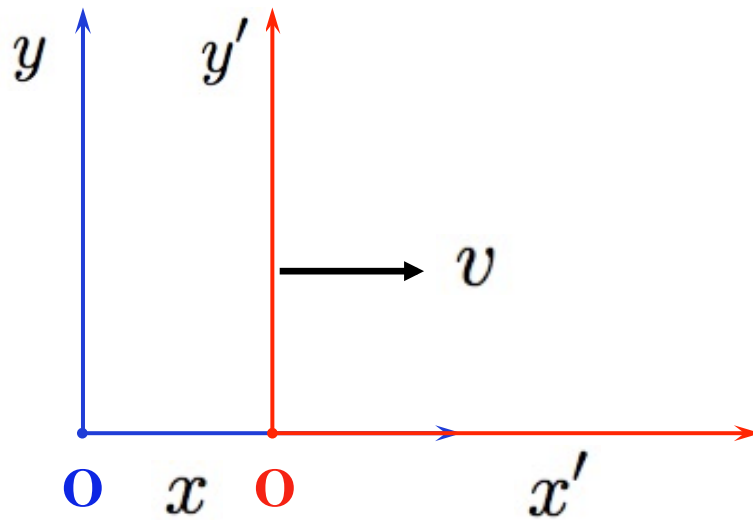
(Complementi 3.1)

i.e., onda e.m. si propaga con velocità c = a quella della luce nel vuoto → fenomeni ottici sono di natura e.m.

Elettromagnetismo

Nelle eq.ni compare una velocità \rightarrow **in quale riferimento sono valide?** i.e., in quale riferimento la velocità della luce vale c ?

Trasformazione Galileiana:



$$x' = x - v t$$

$$y' = y$$

$$t' = t$$

$$\longrightarrow \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right)_{x'} = \frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial B_x}{\partial t'} - v \frac{\partial B_x}{\partial x'} \right)$$

Elettromagnetismo

A questo punto devo trasformare i campi: la speranza è che si trasformino in modo tale da eliminare il termine dipendente dalla velocità relativa tra i riferimenti, così che in \mathcal{K}' risulti

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}'\right)_{x'} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B'_x}{\partial t'}$$

Lecito sperare ?? **NO**: le eq.ni di Maxwell non contengono alcuna relazione tra le derivate temporali e spaziali di $B_x \rightarrow$ il termine dipendente dalla velocità NON sparisce!!

(Complementi 3.1)

→ le equazioni di Maxwell non sono covarianti per trasformazioni galileiane: **il PRG non è applicabile ai fenomeni elettromagnetici**

Elettromagnetismo

che fare? due atteggiamenti possibili:

1. **Principio di Relatività** deve valere anche per i fenomeni e.m. → le trasformazioni galileiane non sono corrette
2. La velocità della luce dipende dal riferimento in modo da investigare sperimentalmente → **Principio di Relatività** valido solo per la meccanica; fenomeni e.m. descrivibili solo in un riferimento privilegiato: **etere**

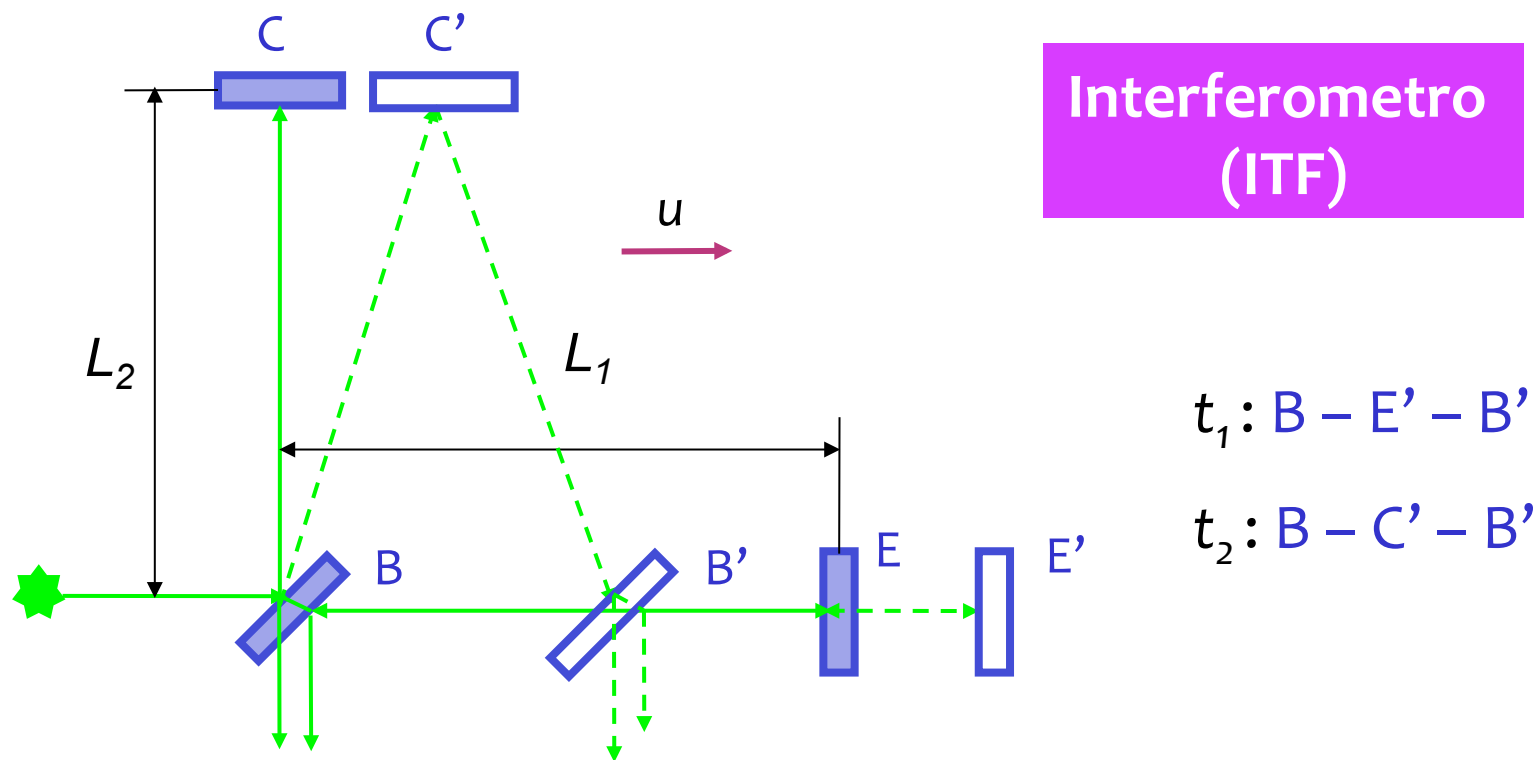
fine '800 – inizio '900: maggioranza della comunità dei fisici assume posizione 2

1905 - **Einstein** sostiene la posizione 1: **eq.ni di Maxwell** corrette, **trasformazioni tra RI** vanno modificate

Esperimento di Michelson & Morley

(1881 - 1887)

Tentativo di misura del moto della Terra rispetto all'etere



Esperimento di Michelson & Morley

calcolo dei tempi di percorrenza nei due bracci

$$t_1 = t_{BE} + t_{EB}$$

$$t_{BE} = \frac{L_1}{c - u} \quad t_{EB} = \frac{L_1}{c + u}$$



$$t_1 = \frac{2(L_1/c)}{1 - (u/c)^2}$$

$$t_2 = t_{BC} + t_{CB}$$

$$t_{BC} = t_{CB} = \frac{L_2}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$



$$t_2 = \frac{2(L_2/c)}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

Esperimento di Michelson & Morley

NB – **numeratore**: quanto impiegherebbe la luce a percorrere ciascun braccio qualora l'ITF fosse fermo; **denominatore**: costante che descrive modifica del tempo di percorrenza indotta dal moto dell'ITF

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c} \left[\frac{L_1}{1 - (u/c)^2} - \frac{L_2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right]$$

rotazione di 90 gradi dell'apparato → scambio dei bracci:

$$\Delta t_{90} = \frac{2}{c} \left[\frac{L_1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - \frac{L_2}{1 - (u/c)^2} \right]$$

$$\longrightarrow \Delta T = \Delta t - \Delta t_{90} = \frac{2(L_1 + L_2)}{c} \left[\frac{1}{1 - (u/c)^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \right]$$

Esperimento di Michelson & Morley

Stima di u : velocità orbitale della Terra $\rightarrow u/c \sim 10^{-4}$

$$\longrightarrow \Delta T = \frac{L_1 + L_2}{c} \left(\frac{u}{c}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{u}{c}\right)^4\right)$$

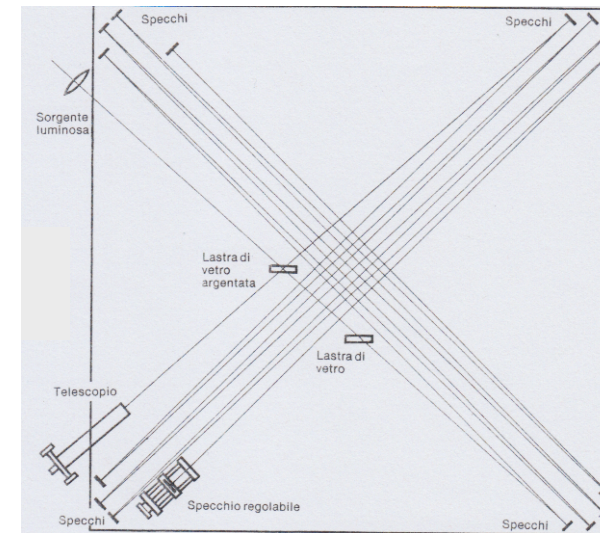
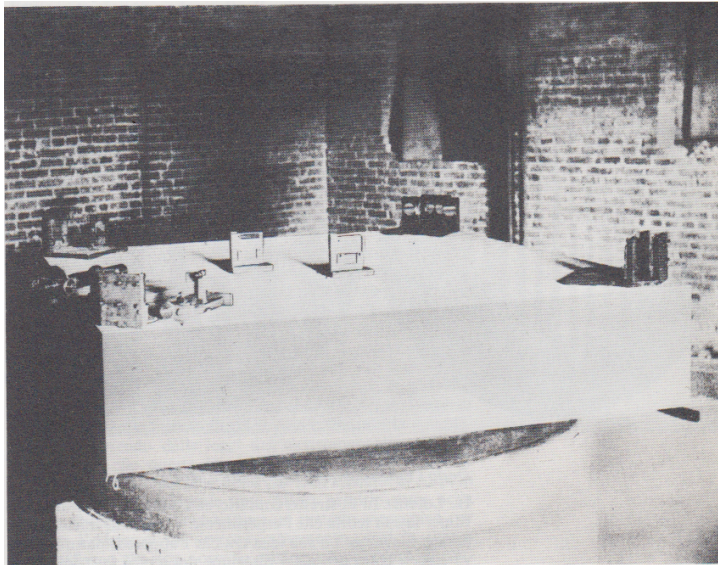
a cui corrisponde uno spostamento di frange:

$$\Delta n = \nu \Delta T \simeq \frac{L_1 + L_2}{\lambda} \left(\frac{u}{c}\right)^2$$

NB – Perché rotazione? Nell'ITF costruito da Michelson & Morley, $L_1 = L_2$
 \rightarrow anche differenze dell'ordine di frazioni della lunghezza d'onda della luce producono spostamento di frange rispetto al caso $u = 0$.
La rotazione di 90 gradi dell'apparato elimina questa incertezza, in quanto Δn è proporzionale alla somma delle lunghezze, e non alla loro differenza.

Esperimento di Michelson & Morley

NB - $\lambda = 550 \text{ nm}$, $L_1 = L_2 = 11 \text{ m}$ $\rightarrow \Delta n \simeq 0.4$



Osservazione sperimentale: **no spostamento delle frange**

NB – ripetizione in periodi diversi dell'anno \rightarrow diversa orientazione di u rispetto al moto della luce nell'ITF: risultato non cambia!!



“vento d'etere” NON esiste

Esperimento di Michelson & Morley

- A rigore, dall'esperimento MM ($L_1 = L_2$) si può solo inferire che la **velocità della luce lungo percorsi di A/R** è la stessa in tutte le direzioni. Sono gli esperimenti con bracci di lunghezza diversa (Kennedy-Thorndike) che consentono di concludere che la velocità della luce lungo percorsi di andata e ritorno non dipende dalla velocità del RI
- La **velocità della luce lungo percorsi di sola andata** non è, in linea di principio, misurabile. Per farlo abbiamo bisogno di due orologi sincronizzati in punti diversi, ma la procedura di sincronizzazione comporta assunzioni sulla velocità della luce → circolo vizioso. Possibile controllare solo se questa velocità è isotropa: verificata con precisione di 10^{-7}

Relatività Speciale

2 postulati al cuore della teoria:

1. le leggi fisiche hanno la stessa forma in tutti i RI
(**principio di relatività**)
2. la velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i RI
(**postulato della costanza della velocità della luce**)

A differenza di quanto generalmente s'intende in matematica, questi postulati hanno un fondamento sperimentale

NB – alcuni storici ritengono che proprio l'aver basato la struttura della **RS** su postulati alimentò la diffidenza dei fisici di ispirazione empirista verso la teoria, favorendo l'idea che essa fosse essenzialmente una branca della Meccanica Razionale, piuttosto che della Fisica

Relatività Speciale

P1 è un **principio di simmetria** che verte sulle leggi fisiche, stabilendone la forma

- NB – nel contesto dell’opera galileiana, il **PR** è una osservazione puramente empirica, non un principio nel senso moderno del termine, i.e., un criterio regolatore delle leggi fisiche
- **RS** è il primo esempio di applicazione di un principio di simmetria, strategia teorica che si è dimostrata al cuore della Teoria dei Campi Quantistici (QFT)

P2 → indipendenza della velocità della luce dal moto della sorgente

NB – in questa forma rimane valido anche in **RG**

conseguenze paradossali per una mente “classica”: **carattere non assoluto del concetto di simultaneità, dilatazione degli intervalli temporali, contrazione delle lunghezze ...**

Relatività Speciale

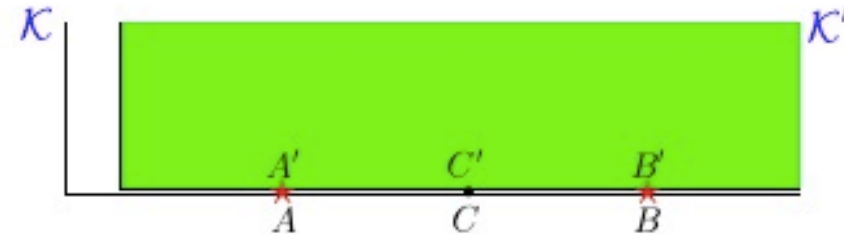
Numerose evidenze sperimentali per **P2**

Esempio: decadimento del pione neutro $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

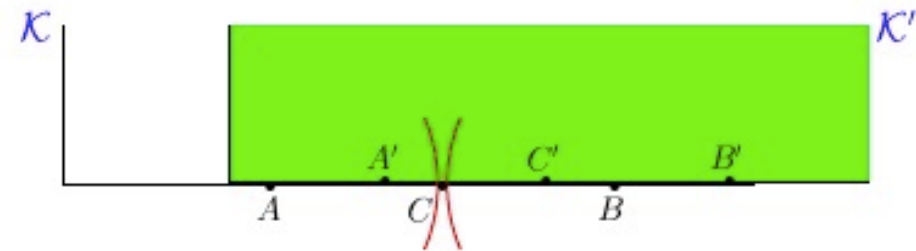
- sistema di quiete del pione \rightarrow fotoni vengono emessi in direzioni opposte lungo le quali si muovono con velocità $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
- riferimento in cui il pione si muove con velocità $v \rightarrow$ se i fotoni si muovono nella direzione del pione (i.e., se energia del pione è molto grande), secondo la meccanica newtoniana la velocità dei fotoni dovrebbe essere $c \pm v$.
Esperimento di **Alväger et al. (1964)**: $v = 0.9975 c \rightarrow$
velocità dei fotoni = $(2.9977 \pm 0.0004) \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$

Relatività della Simultaneità

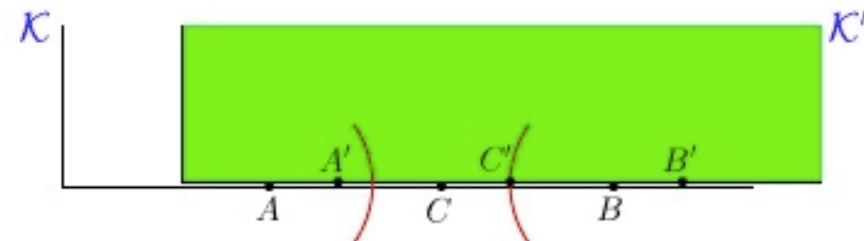
accensione di 2 lampade
nell'istante in cui $A \equiv A'$ e $B \equiv B'$



\mathcal{K} : osservatore in C (a metà tra A e B) riceve i segnali nello stesso istante \rightarrow **emissione segnali da A e B è simultanea**

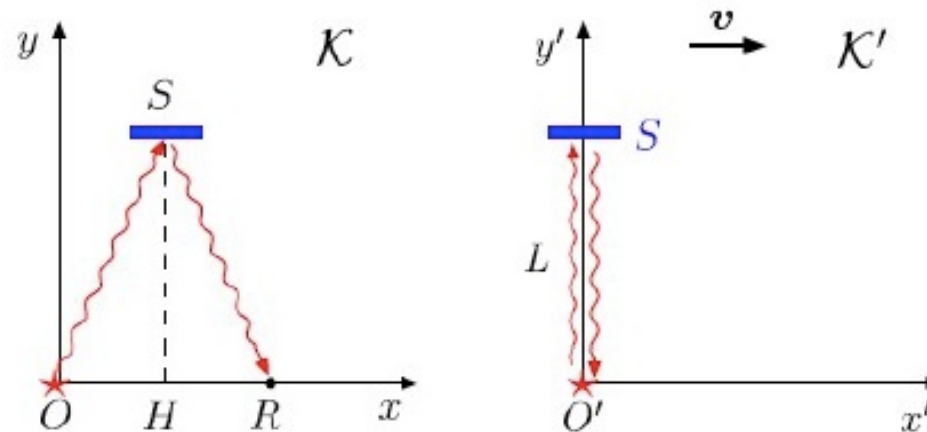


\mathcal{K}' : osservatore in C' (a metà tra A' e B') va verso B e si allontana da A: **P2** \rightarrow in C' arriva prima segnale da B: **emissione segnali da A' e B' NON è simultanea**



Dilatazione degli intervalli temporali

Orologio di luce: sorgente luminosa + specchio piano a distanza L



1. riferimento di quiete (\mathcal{K}') dello specchio \rightarrow tempo di andata e ritorno:

$$\Delta t' = 2 \frac{L}{c}$$

Dilatazione degli intervalli temporali

2. riferimento \mathcal{K} in cui lo specchio è in moto \rightarrow nel tempo $T = \Delta t/2$ lo specchio percorre un tratto $vT \rightarrow$ Pitagora applicato al triangolo rettangolo OSH:

$$c \Delta t = 2 \sqrt{L^2 + \left(v \frac{\Delta t}{2}\right)^2}$$

\longrightarrow

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\beta = v/c)$$

$\Delta t'$ i.e., tempo nel riferimento di quiete = **tempo proprio**

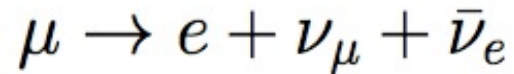
NB- $\beta \leq 1 \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1$

\rightarrow ritmo orologi in moto è più lento

Dilatazione degli intervalli temporali

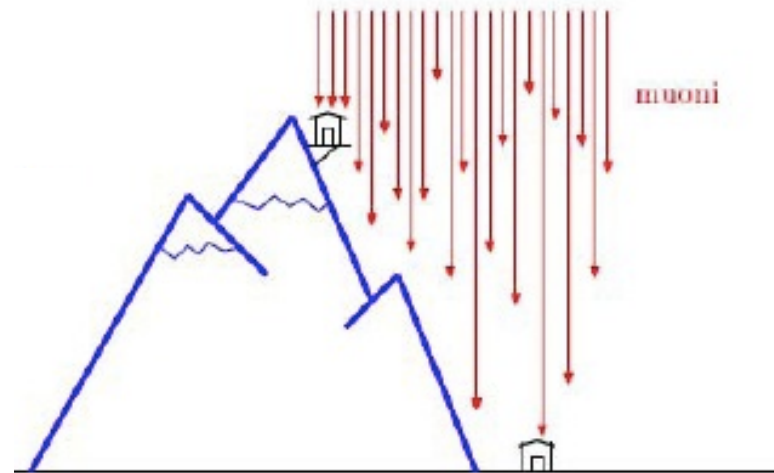
Verifica sperimentale: decadimento dei muoni cosmici
(Rossi & Hall – 1941)

decadimento del muone:



muone fermo \rightarrow vita media:

$$\tau_0 = 2.2 \mu\text{s}$$



2 km di dislivello a $v = 0.995 c \rightarrow$ tempo impiegato $t = 3 \tau_0$

\rightarrow frazione muoni sopravvissuti $= e^{-t/\tau_0} = e^{-3} = 0.05$

Osservazione sperimentale: ne sopravvive il **75 %** \rightarrow ??

dilatazione vita media dei muoni: $\tau = \gamma \tau_0 \approx 10 \tau_0 \rightarrow t = 0.3 \tau$

\rightarrow frazione muoni sopravvissuti $= e^{-0.3} = 0.74$

Contrazione delle lunghezze

verso Sirio a bordo di un'astronave \rightarrow misura distanza percorsa:
1) dal controllo missione sulla Terra; 2) dall'astronauta

1. riferimento della sala controllo (\mathcal{K}) \rightarrow Terra e Sirio in quiete, astronave in moto con velocità v : distanza calcolata a partire dal tempo impiegato $\Delta t \rightarrow L = v \Delta t$

2. riferimento dell'astronave (\mathcal{K}') \rightarrow Sirio va incontro all'astronauta con velocità $v \rightarrow L' = v \Delta t'$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\gamma} \quad \longrightarrow \quad L = \frac{L'}{\gamma}$$

i.e., oggetti risultano **contratti lungo la direzione di moto**

Eventi

P2 → non è più consentito parlare di tempo assoluto → al pari delle coordinate spaziali, il tempo dipende dal RI in cui viene misurato

evento = qualcosa che accade in un certo punto dello spazio in un certo istante di tempo

descrizione formale in termini di quaterna di numeri:

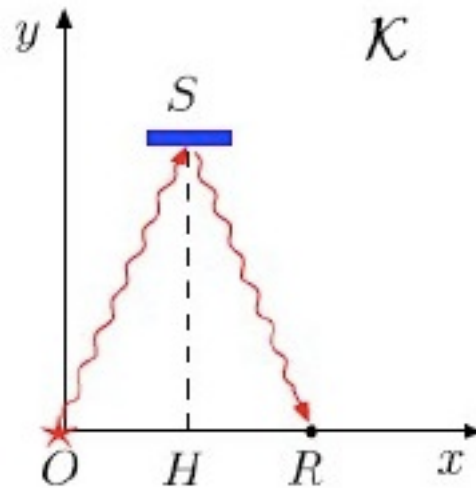
$$\mathcal{A} \equiv (x, y, z, ct) \longrightarrow \boxed{\text{spaziotempo}}$$

- NB – tempo moltiplicato per **c** per avere dimensioni omogenee;
- posizione spaziale parametrizzata da coordinate cartesiane: nulla vieta di usare altre coordinate ... basta che siano 3

prossimità degli eventi \equiv distanza tra punti dello spaziotempo
→ **metrica?**

Intervallo

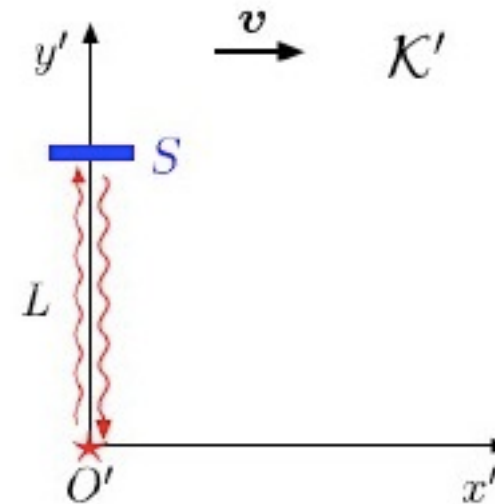
... torniamo all'orologio di luce



$$\Delta x = v \Delta t$$

$$c \Delta t = 2 \sqrt{L^2 + (\Delta x/2)^2}$$

$$\longrightarrow (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 4 L^2$$



$$\Delta x' = 0$$

$$c \Delta t' = 2 L$$

$$\longrightarrow (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = 4 L^2$$

Intervallo

i.e. $(c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2$

→ utile introdurre la quantità **invariante** (Complementi 3.2)

$$\Delta s^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \quad \text{intervallo}$$

che svolge il ruolo di “distanza” tra punti dello spaziotempo

→ **metrica** = $(+, -, -, -)$

Spazio di Minkowski:
geometria piatta pseudoEuclidea

NB – intervallo **NON** è definito positivo (... da ciò deriva tutto)

– eventi distinti possono essere separati da intervallo nullo: sono quelli connessi da segnale luminoso

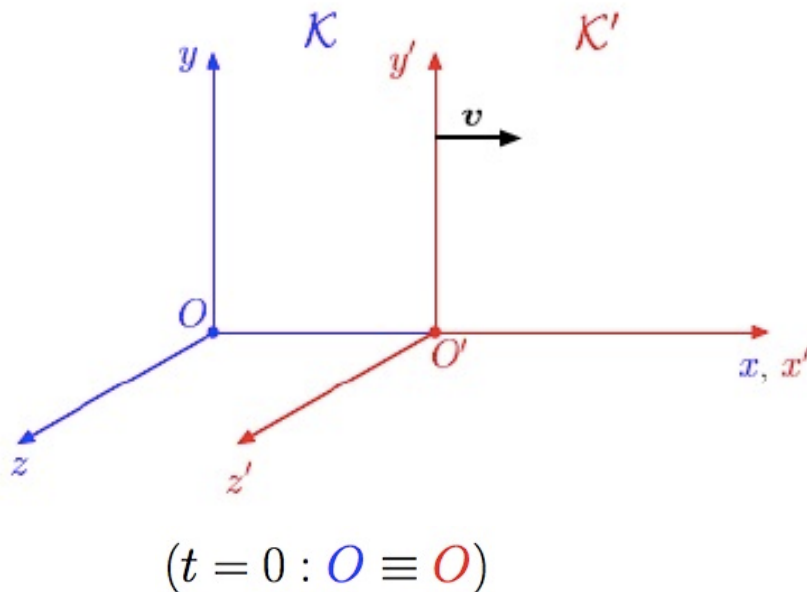
$$\Delta s^2 = 0 \quad \rightarrow \quad (c \Delta t)^2 = \Delta \vec{x}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \pm c$$

Trasformazioni di Lorentz

Quali trasformazioni tra RI compatibili con i postulati della RS?

Condizione fondamentale da assicurare: **invarianza intervallo** tra due eventi, i.e. nella trasformazione $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ deve rimanere inalterata una combinazione di coordinate spaziali e del tempo
→ anche il tempo dell'evento deve cambiare

(Complementi 3.3)



$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - vt) \\y' &= y \\t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)\end{aligned}$$

trasformazioni di Lorentz
(boost)

Trasformazioni di Lorentz

NB – ricavate da Einstein a partire dai postulati della RS; Poincaré fece notare che esse erano apparse per la prima volta in un lavoro di Lorentz del 1904 dove si dimostrava che, combinate con opportune trasformazioni dei campi, lasciano invariate le eq.ni di Maxwell

Confronto **Lorentz** vs **Galilei**:

- dipendenza del tempo dal RI ($t' \neq t$)
- presenza fattore “lorentziano”

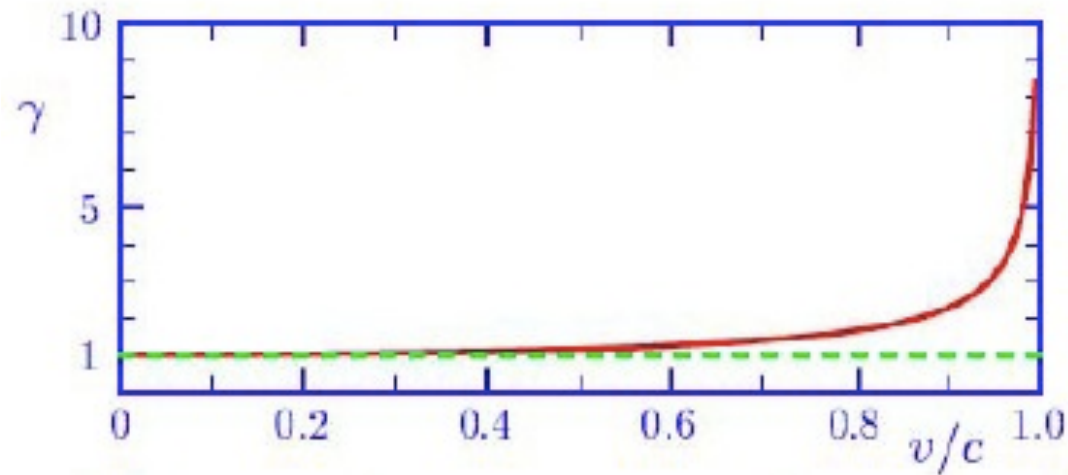
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

contiene **c**, i.e. una costante universale dimensionale (no costanti fondamentali nelle trasf. di Galilei)

Trasformazioni di Lorentz

- $\beta > 1 \rightarrow \gamma$ immaginario: le TL perdono senso
 - $\beta \rightarrow 1$: le TL divengono singolari
- ➔ c è una velocità limite: velocità relativa tra RI mai $> c$

NB – limite galileiano non è $v \ll c$, ma $c \rightarrow \infty$: poiché x è arbitrario, non è detto che sia $vx/c^2 \ll 1 \rightarrow v \ll c$ non implica $t' = t$



Trasformazioni di Lorentz

Diverse modalità di derivazione della forma delle TL → differenza è in ciò che viene imposto in aggiunta al PR:

- ✓ esistenza di velocità limite = c
 - costanza della velocità della luce diviene una conseguenza
- ✓ causalità (i.e., invarianza dell'ordinamento temporale causa-effetto)
 - esiste una velocità limite v_L → TL si ottengono imponendo $v_L = c$
 - misure ottiche o astrofisiche → $|1 - v_L/c| \leq 1.3 \times 10^{-15}$

Fenomenologia delle TL

1. Relatività della simultaneità

- riferimento \mathcal{K} : eventi A e B simultanei $t_A = t_B = t$
- riferimento \mathcal{K}' : trasformazione dei tempi

$$t'_\alpha = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x_\alpha \right) \quad (\alpha = A, B)$$

→ intervallo temporale in \mathcal{K}'

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma \frac{v}{c^2} (x_A - x_B)$$

NB – intervallo $\Delta t'$ apprezzabile anche per basse v , purchè grande Δx

– se $A \equiv B$ in un RI, allora lo è in qualunque altro

Fenomenologia delle TL

2. Successione temporale degli eventi

- riferimento \mathcal{K} : eventi A e B connessi causalmente \rightarrow segnale che si propaga lungo l'asse x con velocità u scambiato tra i due eventi

$$x_B - x_A = u(t_B - t_A) = u \Delta t$$

- riferimento \mathcal{K}' :

$$\begin{aligned} \Delta t' = t'_B - t'_A &= \gamma \left[(t_B - t_A) - \frac{v}{c^2} (x_B - x_A) \right] \\ &= \gamma \left(1 - \frac{vu}{c^2} \right) \Delta t \end{aligned}$$

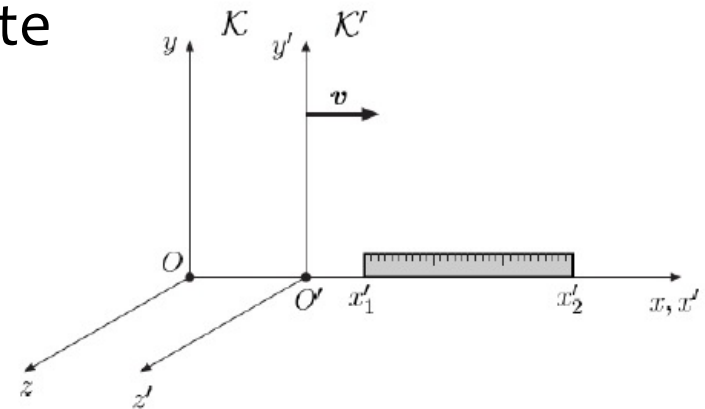
$v < c, u < c \rightarrow$ **ordinamento temporale conservato**

Fenomenologia delle TL

3. Contrazione delle lunghezze

- riferimento \mathcal{K}' : regolo in quiete di lunghezza L'

$$L' = x'_2 - x'_1$$



- riferimento \mathcal{K} : misura lunghezza regolo = “leggere” posizioni degli estremi allo **stesso istante**

$$x'_j = \gamma (x_j - v t) \quad (j = 1, 2)$$

$$\longrightarrow L' = \gamma (x_2 - x_1) \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{\gamma} L'$$

Fenomenologia delle TL

osservatore in moto rispetto al regolo misura **lunghezza minore di quella propria** (quella misurata nel RI in cui il regolo risulta in quiete)

NB – origine del fenomeno: le misure delle estremità del regolo, simultanee in un RI, non lo sono nell'altro: la struttura molecolare dei corpi non si modifica; no proprietà intrinseca del corpo, ma relazione tra misure effettuate da osservatori in moto relativo

– effetto **reciproco**: se invece che in \mathcal{K}' il regolo fosse in quiete rispetto a \mathcal{K} , sarebbe la lunghezza in \mathcal{K}' a risultare contratta del fattore γ

dimensioni nelle direzioni perpendicolari a quella del moto rimangono invariate \rightarrow volume si **contrae** (densità si **dilata**) di un fattore γ (pedice 0 indica le quantità proprie)

$$V = \frac{V_0}{\gamma} \quad \rho = \gamma \rho_0$$

Fenomenologia delle TL

4. Dilatazione degli intervalli temporali

- riferimento \mathcal{K}' : eventi A e B che accadono nello **stesso punto**

$$x'_A = x'_B = x' \qquad \Delta t' = t'_B - t'_A$$

- riferimento \mathcal{K} :

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \gamma (x' + v t'_\alpha) \\ t_\alpha &= \gamma \left(t'_\alpha + \frac{v}{c^2} x' \right) \end{aligned} \qquad (\alpha = A, B)$$

➡ intervallo temporale in \mathcal{K} :

$$\Delta t = t_B - t_A = \gamma (t'_B - t'_A) = \gamma \Delta t'$$

Fenomenologia delle TL

“orologio in moto ritarda”: il ritmo di scansione del **tempo di un orologio in moto rallenta rispetto a quello proprio** (quello misurato nel RI in cui l’orologio risulta in quiete)

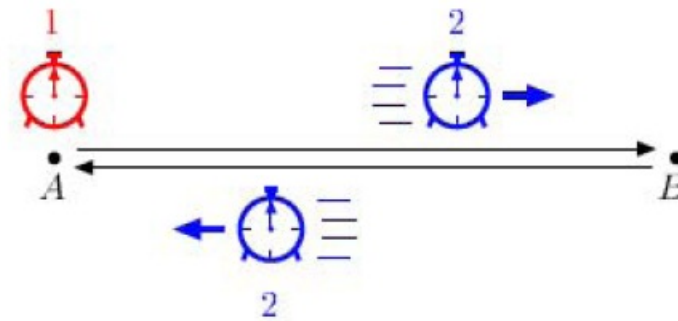
NB – al pari della contrazione delle lunghezze, si tratta di un effetto **reciproco**: se l’orologio fosse in quiete in \mathcal{K} e registrasse la differenza in tempo tra due eventi che accadono nello stesso punto, un osservatore in \mathcal{K}' , con i propri orologi, misurerebbe un intervallo temporale maggiore di un fattore γ

Fenomeno non presenta aspetto paradossale: in un RI i due eventi accadono nello stesso punto $x \rightarrow$ intervallo temporale misurato da **un solo orologio** posto in x ; nell’altro RI i due eventi non coincidono nello spazio \rightarrow per misurare l’intervallo temporale sono **necessari due orologi**

Paradosso dei gemelli

2 orologi sincronizzati situati nello stesso punto A:

- **orologio 1** rimane fermo in A;
- **orologio 2** all'istante t_0 si muove verso B con velocità v ; giunto in B al tempo t_a , **inverte** il moto e torna (con la stessa velocità) in A al tempo t_r



1. $A \rightarrow B$: durata propria per l'orologio 2

$$\Delta\tau_2^{(a)} = \frac{t_a - t_0}{\gamma}$$

Paradosso dei gemelli

2. B → A: durata propria per l'orologio 2

$$\Delta\tau_2^{(r)} = \frac{t_r - t_a}{\gamma}$$

→ durata complessiva del viaggio A/R:

$$\Delta\tau_2 = \Delta\tau_2^{(a)} + \Delta\tau_2^{(r)} = \frac{t_r - t_0}{\gamma}$$

orologio 1 in quiete: $t_r - t_0$ è l'intervallo di tempo proprio misurato da questo orologio, i.e. $t_r - t_0 = \Delta\tau_1$



$$\Delta\tau_2 < \Delta\tau_1$$

i.e., **orologio in moto**, dopo aver percorso una **curva chiusa** ed essere tornato al punto di partenza, risulta **in ritardo** rispetto a quello rimasto fermo!

Paradosso dei gemelli

violazione (apparente) del PR: nel RI solidale con l'orologio 2 è quello 1 che compie il viaggio A/R → ragionando come prima, otteniamo:

$$\Delta\tau_1 < \Delta\tau_2$$

In realtà, questa relazione è **falsa!!** PR riguarda RI: orologio 2 NON lo è! Per tornare al punto di partenza, orologio 2 deve invertire il moto → necessaria un'**accelerazione** → NON esiste RI solidale con 2

NB – Uniformità del moto di 2 è inessenziale. Orologio in moto con velocità variabile → durata propria del viaggio A/R:

$$\Delta\tau_2 = \int_{t_0}^{t_r} \frac{dt}{\gamma} = \int_{t_0}^{t_r} dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

(la variabile t è relativa al riferimento di quiete di 1)

Paradosso dei gemelli

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1 \quad \longrightarrow \quad \Delta\tau_2 < \int_{t_0}^{t_r} dt = t_0 - t_r \quad \text{i.e.} \quad \Delta\tau_2 < \Delta\tau_1$$

Langevin (1911): sostituzione dei due orologi con due gemelli (i.e., con i loro orologi biologici interni)

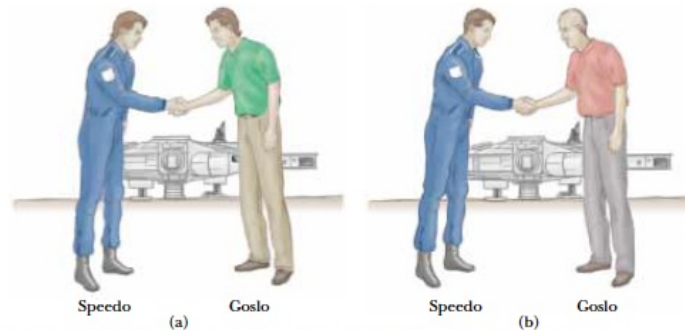


Figure 39.10 (a) As one twin leaves his brother on the Earth, both are the same age. (b) When Speedo returns from his journey to Planet X, he is younger than his twin Goslo.

→ semplice calcolo relativistico diviene oscuro perché viene utilizzata come metafora un fenomeno che il senso comune trova difficile da accettare. Ma l'effetto è reale e misurabile: [esperimento di Hafele & Keating](#)

Esperimento Hafele-Keating

2 aerei di linea volano intorno alla Terra in direzioni opposte (EST & OVEST): ciascun aereo trasporta un orologio atomico al Cesio → al ritorno a terra, confronto letture di questi orologi con quella di un altro orologio atomico (i 3 orologi sono identici e sincronizzati tra loro prima del volo)



Risultato: rispetto all'orologio rimasto a terra

- ✓ orologio EST in **ritardo** di (59 ± 10) ns
- ✓ orologio OVEST in **anticipo** di (273 ± 7) ns

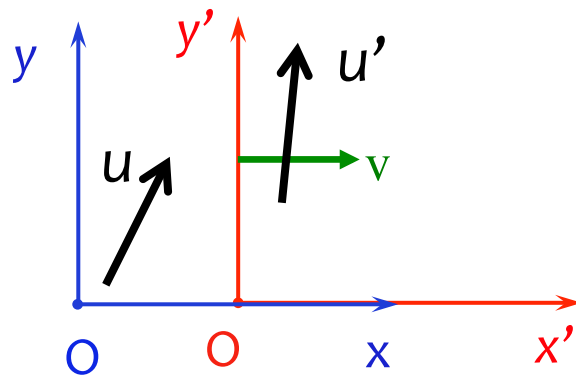
(Complementi 3.4)

in **eccellente accordo** con le predizioni della RS

- NB – volo verso EST velocità aereo si somma a quella di rotazione della Terra, mentre nel volo verso OVEST si sottrae;
– anche il campo gravitazionale terrestre introduce dilatazione temporale (**Relatività Generale**)

Fenomenologia delle TL

5. Trasformazione della velocità



$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - v t) \\ y' &= y \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{aligned} \quad (\star)$$

vettori velocità: $\vec{u} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \quad \vec{u}' = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'} \right)$

$$\begin{aligned} (\star) \quad \longrightarrow \quad dx' &= \gamma (dx - v dt) \\ dy' &= dy \\ dt' &= \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right) \end{aligned} \quad \star$$

Fenomenologia delle TL

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \quad (a)$$



$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)}$$



NB - $\vec{u} = (c, 0) \rightarrow u'_x = \frac{c - v}{1 - (v/c^2)c} = c \quad u'_y = 0$

i.e., la **velocità della luce è invariante per TL**

$v \rightarrow -v, u \leftrightarrow u'$ nella (a) $\longrightarrow u_x = \frac{u'_x + v}{1 + (v/c^2)u'_x}$

punto di vista diverso: **legge di composizione delle velocità**

NB - $u'_x = c \rightarrow u_x = c$ c è un limite invalicabile!

Composizione delle velocità

NB - Consideriamo i due scenari seguenti:



Problema: calcolo velocità di A rispetto a C \rightarrow formula di composizione delle velocità si applica ad entrambe le situazioni (seconda situazione è uguale alla prima, come visto da B)

- A si muove con v_1 rispetto a B e questo con v_2 rispetto a C : quanto veloce A rispetto a C? [formula relativistica di addizione delle velocità](#)
- qual è la velocità relativa di A e C, come vista da B? $v_1 + v_2$

Composizione delle velocità

Se le due velocità sono date rispetto allo **stesso osservatore**, B, e vogliamo sapere qual è la velocità relativa misurata da B, allora dobbiamo solo **sommare** (algebricamente) **le velocità**

NB – La velocità risultante può essere maggiore di c . Se vedo due oggetti che vengono verso di me, uno da destra e uno da sinistra, con velocità $\beta = 0.9$, la velocità relativa degli oggetti nel mio riferimento è $\beta_{12} = 1.8$. Nel riferimento di uno di essi, però, la velocità relativa è:

$$\frac{0.9 + 0.9}{1 + 0.9 \times 0.9} \simeq 0.9945$$

Ma, se vogliamo sapere la velocità relativa come misurata da A o C, dobbiamo usare la formula relativistica di addizione delle velocità: **l'operazione di sommare velocità misurate rispetto a osservatori diversi è priva di senso**

Effetto Doppler

Riferimento \mathcal{K} \rightarrow onda piana: $A e^{i\psi(t, \vec{x})}$

$$\begin{aligned} \text{dove: } \psi(t, \vec{x}) &= \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} = 2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} \cdot \vec{x} \\ &= 2\pi \left[\nu \left(t - \frac{\hat{k} \cdot \vec{x}}{c} \right) \right] = 2\pi \Phi \end{aligned}$$

Propagazione nel piano x-y: versore d'onda $\hat{k} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$

$$\longrightarrow \Phi = \nu \left(t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c} \right) = \nu \left(t - \frac{\ell}{c} \right)$$

NB – cresta dell'onda che passa per l'origine di \mathcal{K} al tempo $t = 0$ giunge all'osservatore posto in (x, y) dopo un tempo $t_o = \ell/c \rightarrow$ all'istante t l'osservatore avrà contato un numero di creste pari a $\nu(t - t_o)$, i.e., Φ

Effetto Doppler

Riferimento \mathcal{K}' ($O' \equiv O$ al tempo $t' = t = 0$): numero di creste contate da osservatore in (x', y') nell'intervallo di tempo tra $t'_o = \ell'/c$ e t'

$$\Phi' = \nu' \left(t' - \frac{\ell'}{c} \right)$$

deve essere uguale a quello contato dall'osservatore in \mathcal{K} , i.e., la fase dell'onda è invariante, per cui:

$$\nu \left(t - \frac{\ell}{c} \right) = \nu' \left(t' - \frac{\ell'}{c} \right)$$

$$\text{TL } \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}' \quad x' = \gamma(x - vt) \quad t' = \gamma \left[t - \frac{v}{c^2} x \right]$$

$$\longrightarrow \quad \Phi' = \frac{\nu'}{c} \left[c \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) - \gamma (x - vt) \cos \theta' - y \sin \theta' \right]$$

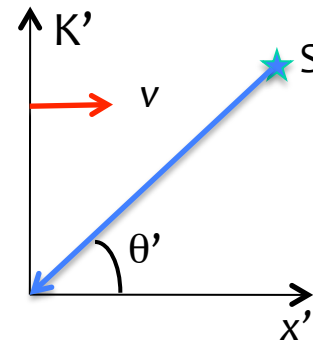
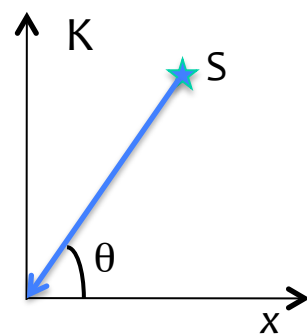
Effetto Doppler

$$\Phi' = \frac{\nu'}{c} [c \gamma (1 + \beta \cos \theta') t - \gamma (\cos \theta' + \beta) x - (\sin \theta') y]$$

$$\Phi = \Phi' \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} t \quad \rightarrow \quad \nu = \nu' \gamma (1 + \beta \cos \theta') \quad (1) \\ x \quad \rightarrow \quad \nu \cos \theta = \nu' \gamma (\cos \theta' + \beta) \quad (2) \\ y \quad \rightarrow \quad \nu \sin \theta = \nu' \sin \theta' \quad (3) \end{array}$$

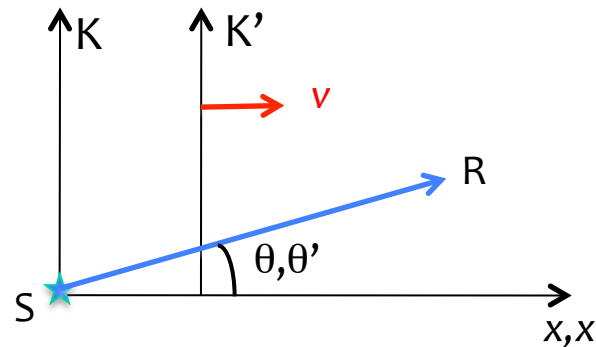
N.B. $\frac{(3)}{(2)} \quad \longrightarrow \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma (\cos \theta' + \beta)}$

aberrazione della luce

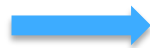


Effetto Doppler

Sorgente S, in quiete nell'origine di \mathcal{K} , emette segnale di frequenza ν che si propaga nel piano x-y formando angolo θ con asse x; osservatore R, solidale con riferimento \mathcal{K}' in moto (lungo x) con velocità v , riceve il segnale emesso da S



(1)



$$\nu' = \frac{\nu}{\gamma (1 + \beta \cos \theta')}$$

Effetto Doppler

N.B. - limite non-relativistico: $\nu' = \frac{\nu}{1 + \beta \cos \theta'}$

Caso particolare: segnale si propaga lungo la direzione del moto relativo sorgente-ricevitore → Doppler longitudinale

$$\theta' = 0 \quad \longrightarrow \quad \nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

- N.B. – ricevitore si allontana alla sorgente ($\beta > 0$) → $\nu' < \nu$ → redshift
– ricevitore si avvicina dalla sorgente ($\beta < 0$) → $\nu' > \nu$ → blueshift
– Doppler longitudinale è un effetto del primo ordine in β

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \approx \nu (1 - \beta)$$

i.e., a meno di termini $O(\beta^2)$, la formula non-relativistica

Effetto Doppler

Caso particolare: segnale che si propaga perpendicolarmente alla direzione del moto relativo sorgente-ricevitore → Doppler trasverso

$$\theta' = \frac{\pi}{2} \quad \longrightarrow \quad \nu' = \frac{\nu}{\gamma}$$

i.e. la frequenza misurata dal ricevitore è sempre minore di quella emessa dalla sorgente

N.B. – $\theta' = \pi/2$ nella formula non-relativistica $\nu' = \frac{\nu}{1 + \beta \cos \theta'}$

→ nessun variazione di frequenza: no Doppler trasverso nell'ottica classica

– Doppler trasverso è un effetto del secondo ordine in β

$$\nu' = \nu \sqrt{1 - \beta^2} \approx \nu \left(1 - \frac{1}{2} \beta^2\right)$$

Spaziotempo di Minkowski

$$\begin{array}{l} \text{metrica} \\ (+, -, -, -) \end{array} \longrightarrow \Delta s^2 \left\{ \begin{array}{l} > 0 & \text{intervallo tipo tempo} \\ < 0 & \text{intervallo tipo spazio} \\ = 0 & \text{intervallo tipo luce} \end{array} \right.$$

NB – alcune importanti osservazioni:

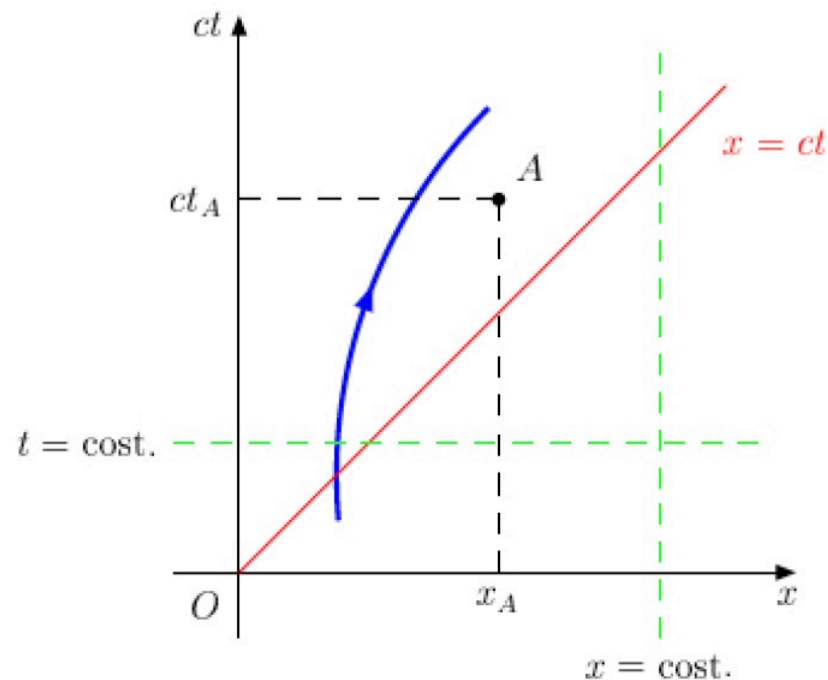
- eventi simultanei: $\Delta t = 0 \rightarrow \Delta s^2 < 0$
viceversa: $\Delta s^2 < 0 \rightarrow \exists$ sempre RI dove 2 eventi sono simultanei
- eventi coincidenti: $\Delta \vec{x} = 0 \rightarrow \Delta s^2 > 0$ (Esercizio 1.4.3)
viceversa: $\Delta s^2 > 0 \rightarrow \exists$ sempre RI dove 2 eventi sono coincidenti
- eventi connessi da segnale luminoso: $\Delta s^2 = 0$
- eventi causalmente connessi: $\Delta s^2 \geq 0$

$$|\Delta \vec{x}| = u \Delta t, u \leq c \rightarrow |\Delta \vec{x}| \leq c \Delta t$$

Spaziotempo di Minkowski

RS: tempo ha lo stesso status delle coordinate spaziali →
diagrammi spaziotemporali

NB – riduzione ad una sola dimensione spaziale
per motivi di rappresentazione



Evento = punto nel piano (x, ct)

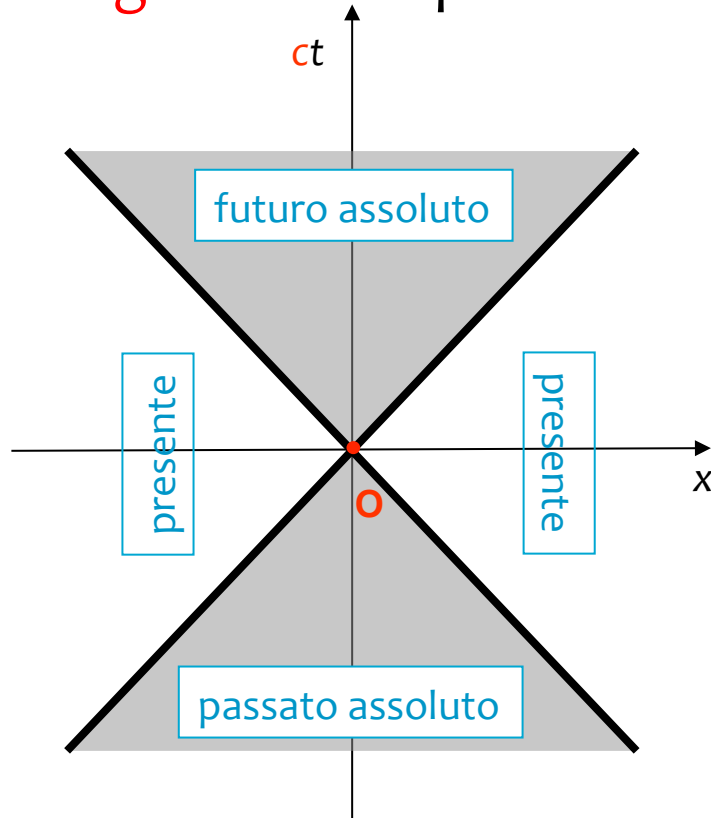
Fenomeno fisico (e.g., moto di
una particella) = curva (**linea
d'universo**) nel piano (x, ct)

$$\text{NB} - \tan \theta = \frac{dx}{d(ct)} = \beta \leq 1$$

NB – $x \perp ct$ per pura comodità: angolo tra questi due assi è arbitrario!

Spaziotempo di Minkowski

segno $\Delta s^2 \rightarrow$ partizione dello spaziotempo in 3 regioni distinte



$\Delta s^2 > 0 \equiv$ futuro \cup passato

$\Delta s^2 < 0 \equiv$ presente

cono di luce di O

superficie 3D in spaziotempo 4D;
luogo degli eventi a $\Delta s^2 = 0$:
traiettoria della luce emessa da O .

interno del cono di luce di O

insieme delle linee di universo delle
particelle con $m \neq 0$

NB – $\Delta s^2 < 0$ è **altrove assoluto**: in nessun
RI evento che appartiene a tale
regione e evento O potranno mai
coincidere

Spaziotempo di Minkowski

Riassumendo:

| | Newton | Einstein |
|----------|---------|---------------------|
| Futuro | $t > 0$ | $ ct > x , t > 0$ |
| Presente | $t = 0$ | $ ct < x $ |
| Passato | $t < 0$ | $ ct > x , t < 0$ |

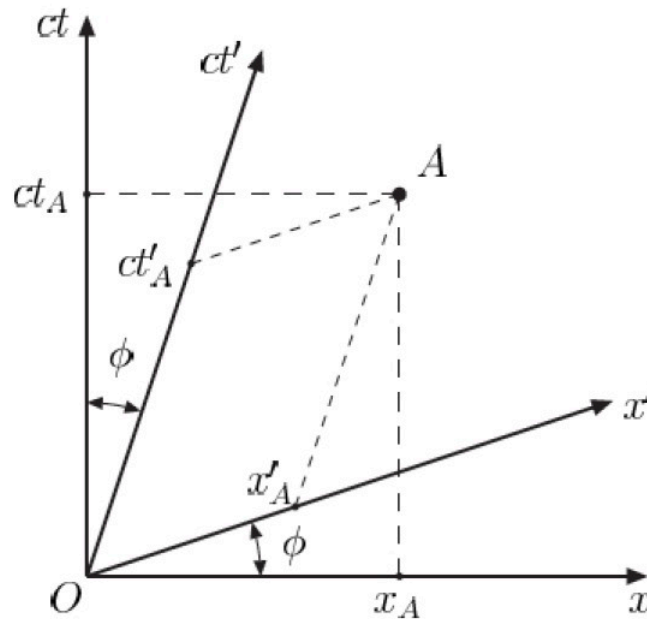
Spaziotempo come varietà 4-dimensionale → **4-vettori**
di cui ne conosciamo già un esempio: la **4-posizione**

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

di **norma** pari a: $x^2 = (ct)^2 - \vec{x}^2$

Spaziotempo di Minkowski

Rappresentazione delle trasformazioni di Lorentz



$$x' = \gamma (x - \beta ct)$$

$$ct' = \gamma (ct - \beta x)$$

- asse x' $t' = 0 \rightarrow ct = \beta x$
 - asse t' $x' = 0 \rightarrow x = \beta ct$
- $\phi = \arctan \beta$

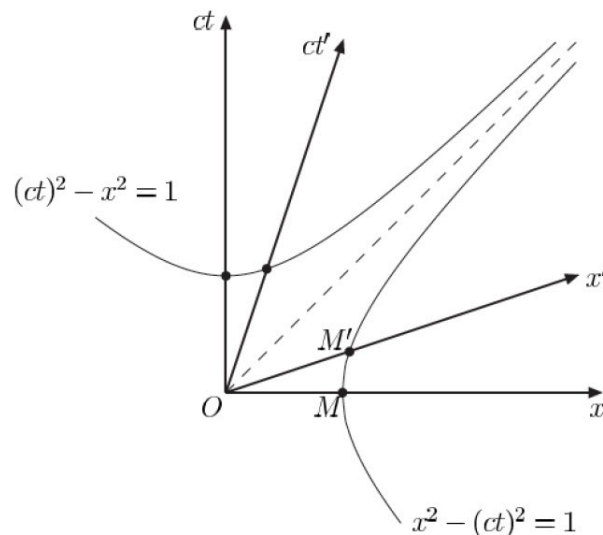
Spaziotempo di Minkowski

- ✓ TL → assi “coordinati” eseguono movimento a forbice; gli assi sono **ortogonali** nella metrica **pseudo-euclidea** (non appaiono così perché li vediamo con il “pregiudizio euclideo”)

$$\text{NB} - \beta = 1 \rightarrow x' = ct' \rightarrow x = ct$$

cono di luce è invariante, i.e. la velocità della luce è la stessa in tutti i riferimenti inerziali

- ✓ Attenzione: **scale sui due sistemi di assi sono diverse!!**



invarianza dell'intervallo →

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2$$



$$M \equiv x = 1$$

$$M' \equiv x' = 1$$

OM e OM', appaiono diversi ma hanno la stessa lunghezza

(Esercizio 1.5.2)

Spaziotempo di Minkowski

$$\checkmark \quad \beta = \tanh \eta \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \eta}} = \cosh \eta, \quad \gamma \beta = \sinh \eta$$

→ sostituendo nella espressione delle TL

$$\begin{aligned} x' &= x \cosh \eta - (ct) \sinh \eta \\ (ct') &= -x \sinh \eta + (ct) \cosh \eta \end{aligned}$$

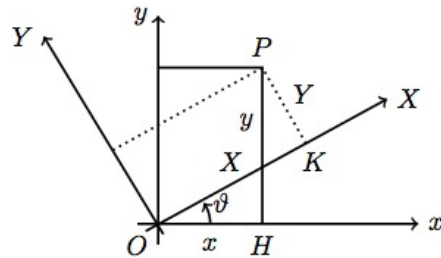
$\eta =$ rapidità

i.e., in notazione matriciale (utile più avanti)

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\eta) \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad \mathcal{R}(\eta) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta \\ -\sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix}$$

Spaziotempo di Minkowski

Analogia: rotazioni nello spazio euclideo 2-dimensionale



$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

→ TL sono **rotazioni in spazio pseudoeuclideo**; la geometria di questo tipo di spazio è **iperbolica**

NB – $\det R = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ → invarianza della distanza euclidea

$\det \mathcal{R} = \cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1$ → invarianza dell'intervallo

– composizione relativistica delle velocità:

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} = \frac{\tanh \eta_1 + \tanh \eta_2}{1 + \tanh \eta_1 \tanh \eta_2} = \tanh(\eta_1 + \eta_2)$$

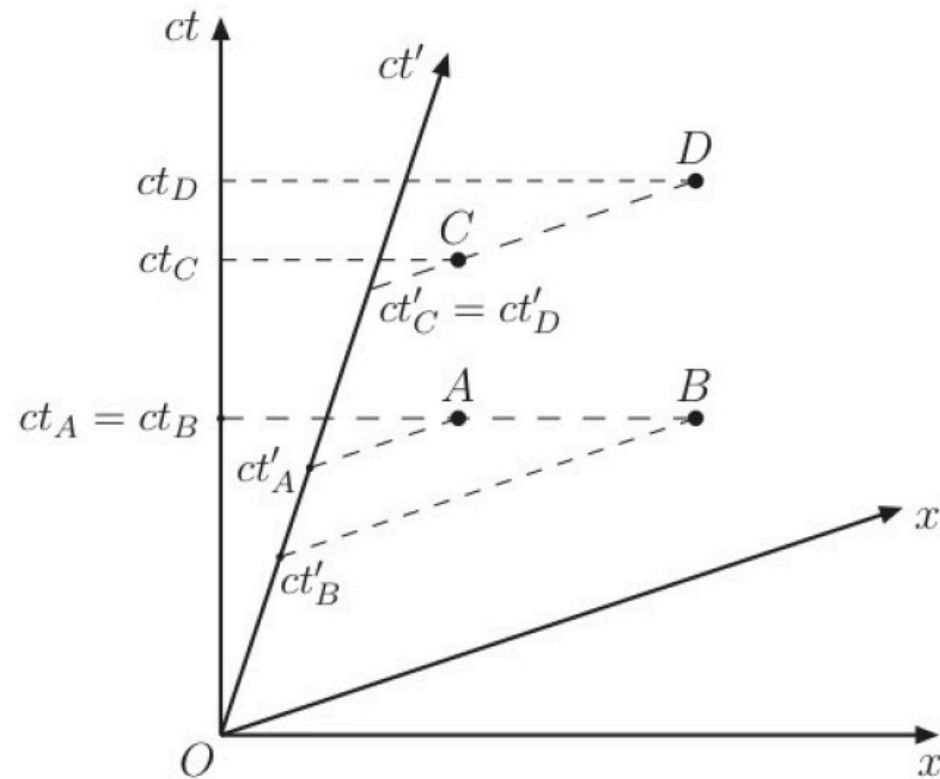
i.e., le rapidità si sommano nel modo standard

Spaziotempo di Minkowski

relatività della simultaneità

A e B simultanei in \mathcal{K}

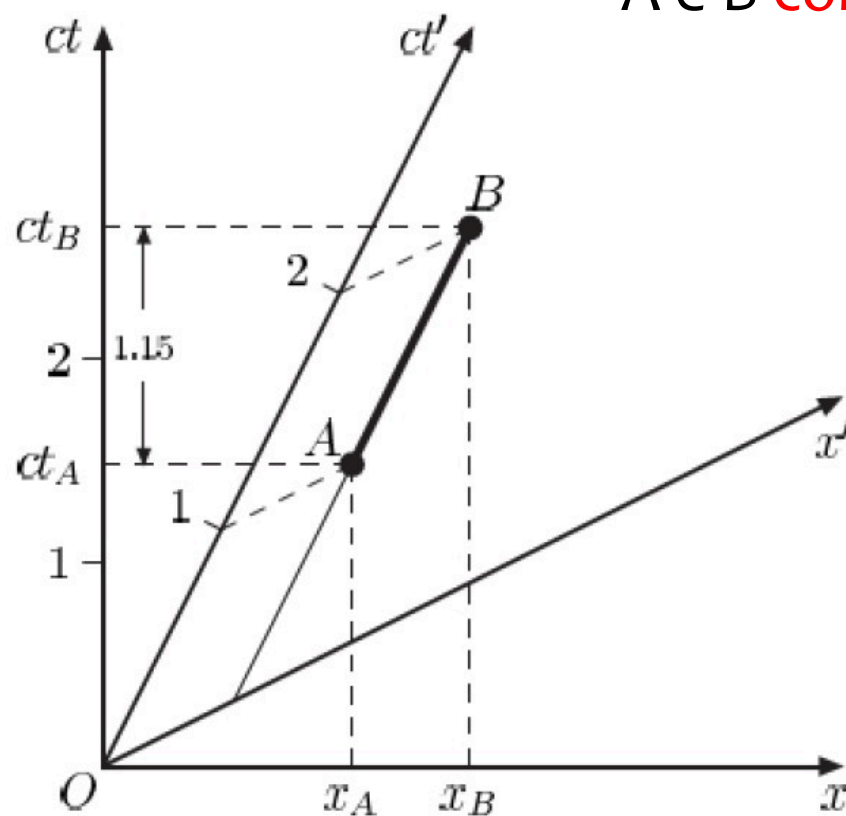
C e D simultanei in \mathcal{K}'



Spaziotempo di Minkowski

dilatazione degli intervalli temporali

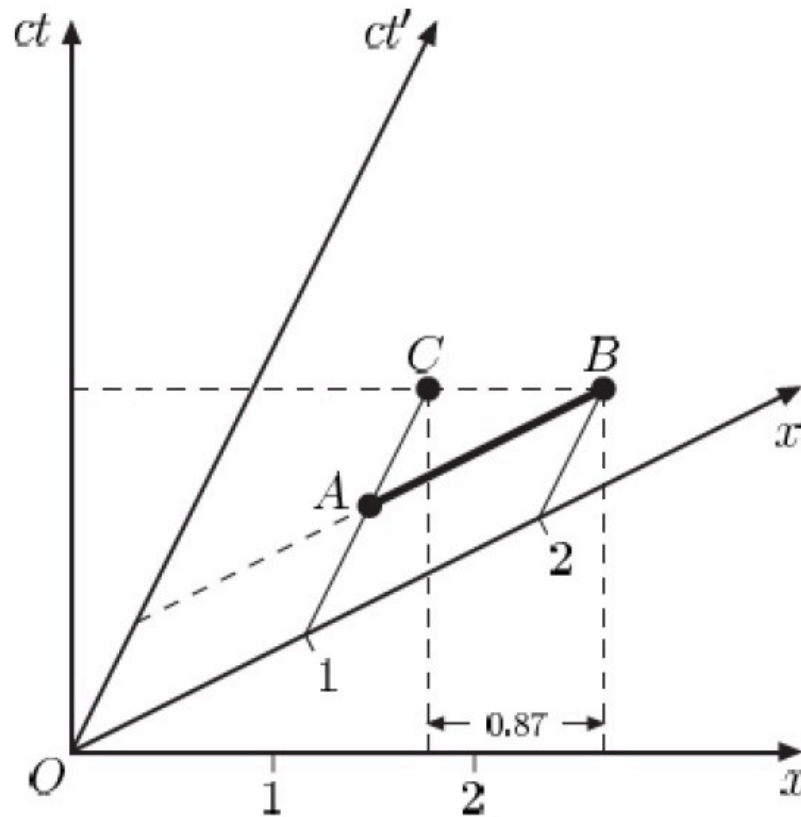
A e B **coincidenti** in \mathcal{K}'



Spaziotempo di Minkowski

contrazione delle distanze

A e B **simultanei** in \mathcal{K}'



(Esercizio 1.5.3)

Impulso & Energia

Impulso

(Complementi 3.5 & 3.6)

Energia

$$\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}$$

$$E = m_0 c^2 \gamma$$

NB – particella in quiete: $\gamma = 1 \rightarrow E = m_0 c^2$

$$- \quad \begin{array}{l} E = m_0 c^2 \gamma \\ p = m_0 v \gamma \end{array} \quad \longrightarrow \quad p = E \frac{v}{c^2} \quad (a)$$

$$\checkmark \quad E^2 - (pc)^2 = E^2 - \left(E \frac{v}{c^2}\right)^2 c^2 = E^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{E^2}{\gamma^2}$$

$$\longrightarrow \quad \sqrt{E^2 - (pc)^2} = \frac{E}{\gamma} = m_0 c^2 \quad (b) \quad (\text{mass shell})$$

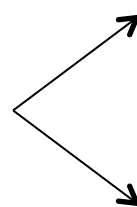
$$\checkmark \quad v = c \xrightarrow{(a)} p = \frac{E}{c} \xrightarrow{(b)} m_0 = 0$$

in RS \exists particelle di massa nulla: quelle con $v = c$

Equivalenza Massa-Energia

Predizione fondamentale della **RS**, sebbene meno paradossale della ridefinizione dei concetti di spazio e tempo

Newton

massa  quantità di materia ($M = \sum_k m_k$)
inerzia ($F = M a$)

legge zero: **la massa si conserva**

Einstein

ruolo della massa viene svolto dall'energia

- massa = energia di riposo

- $M \neq \sum_k m_k$

è **l'energia totale a conservarsi**, non la massa

Equivalenza Massa-Energia

$$\sum_i T_i + \sum_i m_i c^2 = \sum_f T_f + \sum_f m_f c^2$$

stato iniziale = stato finale

salvo che in casi particolari, e.g. **urti elastici**, i termini cinetico e di massa, **non** sono separatamente conservati e si convertono l'uno nell'altro

NB – energia totale:

$$E = T + m c^2$$

→ energia definita a meno di una costante → si potrebbe pensare che il termine di massa sia privo di implicazioni fisiche: **NO!** Non conservazione della massa → non posso eliminarlo ridefinendo il livello zero dell'energia

Equivalenza Massa-Energia

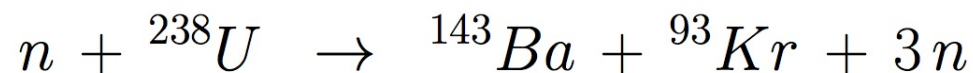
1. energia solare

potenza irradiata dal Sole: $P \simeq 4 \times 10^{26} \text{ W}$

→ diminuzione massa: $\Delta M_{\odot} = \frac{P}{c^2} \simeq 4.4 \times 10^9 \text{ kg s}^{-1}$

$M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta M_{\odot}}{M_{\odot}} \simeq 2.2 \times 10^{-21}$

2. fissione dell'uranio-238



perdita complessiva di massa: $\Delta M = 3.02 \times 10^{-28} \text{ kg}$

$M = m_n + m_U = 3.97 \times 10^{-25} \text{ kg} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta M}{M} = 7.6 \times 10^{-4}$

Equivalenza Massa-Energia

3. Decadimento di particella in quiete $A \rightarrow B + C$
primo principio della termodinamica \rightarrow energia interna di A si trasforma in energia cinetica + energia interna di B e C

$$U_A = T_B + T_C + U_B + U_C$$

particella elementare è puntiforme: no struttura interna

$$U_A = 0$$

i.e., **fisica classica** non spiega decadimento delle particelle puntiformi \rightarrow come fanno a decadere i muoni cosmici?

energia di massa del muone ($106 \text{ MeV}/c^2$) si trasforma in energia cinetica delle particelle finale (+ la massa dell'elettrone: $0.511 \text{ MeV}/c^2$)

NB – non è corretto pensare che elettrone e neutrini siano inizialmente contenuti nel muone: questo si **trasforma** nelle particelle finali \rightarrow **teoria quantistica dei campi (QFT)**

Massa di un sistema composto

energia di massa di un sistema composto:

$$M c^2 = \sum_i \left(T_i + m_i c^2 + \underbrace{\sum_{j>i} U_{ij}} \right)$$

energia d'interazione
tra i costituenti

i.e., la massa del sistema non è la semplice somma delle masse dei suoi componenti, ma ne differisce di:

$$\Delta M = M - \sum_i m_i = \frac{1}{c^2} \sum_i \left(T_i + \sum_{j>i} U_{ij} \right)$$

Massa di un sistema composto

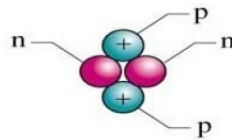
sistemi legati: $\Delta M < 0 \rightarrow$ energia di legame:

$$E_\ell = - \sum_i \left(T_i + \sum_{j>i} U_{ij} \right) > 0 \quad \rightarrow \quad M = \sum_i m_i - \frac{E_\ell}{c^2}$$

Nucleo atomico: Z protoni e $(A - Z)$ neutroni

$$M = Z m_p + (A - Z) m_n - \frac{E_\ell}{c^2}$$

Esempio: ${}^4\text{He}$



$$m_p c^2 = 938.3 \text{ MeV}$$

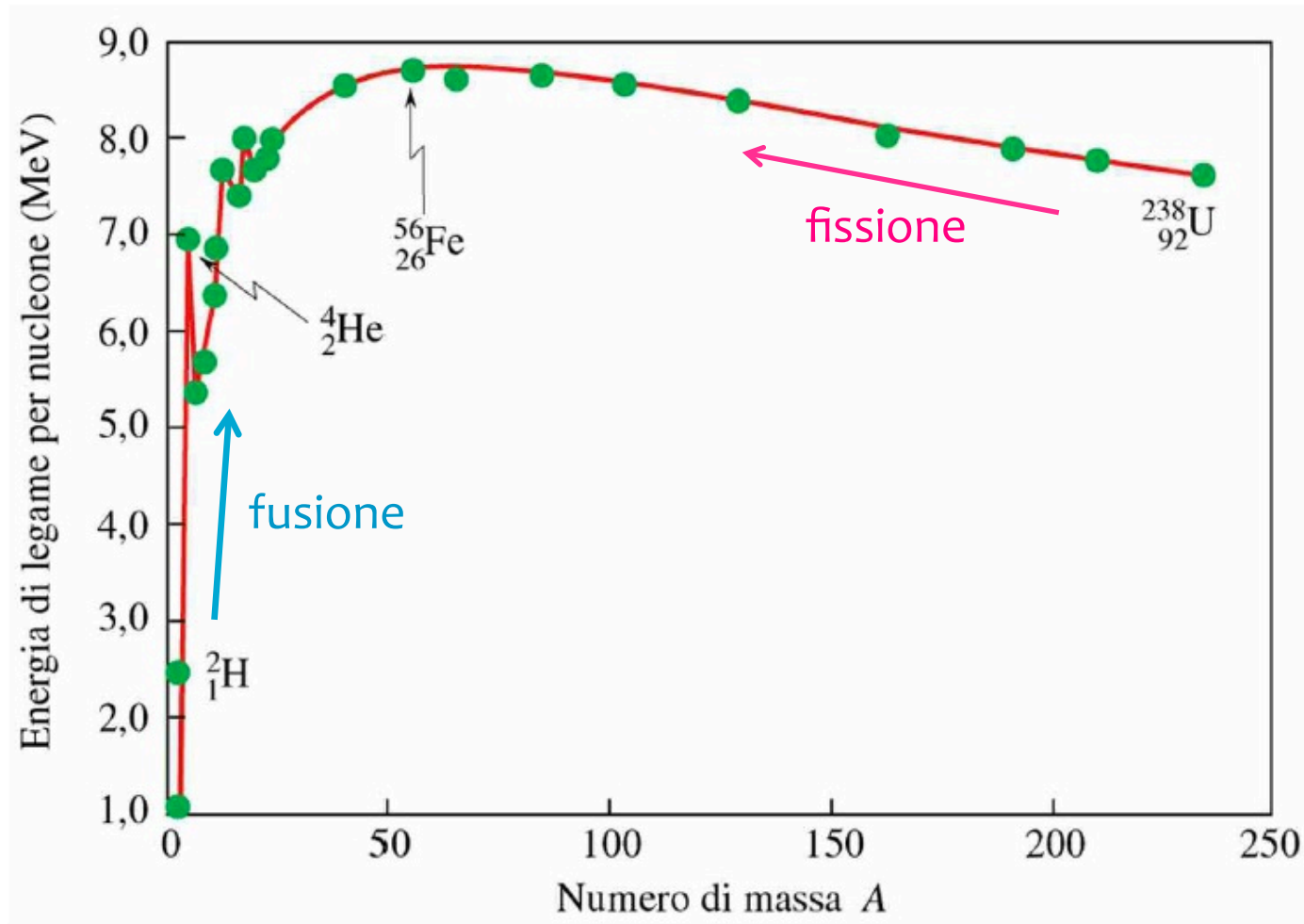
$$m_n c^2 = 939.6 \text{ MeV}$$

$$M_{\text{He}} c^2 = 3728.4 \text{ MeV}$$

$$\rightarrow E_\ell = [2(m_p + m_n) - M_{\text{He}}] c^2 \simeq 27.4 \text{ MeV}$$

Massa di un sistema composto

energia di legame per nucleone = E_l/A



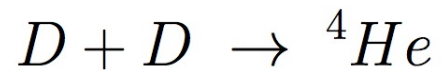
Reazioni Nucleari

energia rilasciata:

$$Q = \sum_i m_i - \sum_f m_f \begin{cases} > 0 & \text{esoenergetica} \\ < 0 & \text{endoenergetica} \end{cases}$$

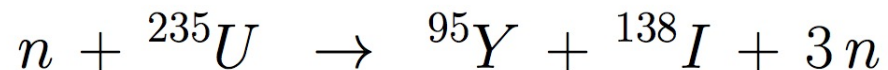
reazioni esoenergetiche:

- fusione nuclei leggeri



$$Q = 2 M_D - M_{\text{He}} = 24 \text{ MeV}$$

- fissione nuclei pesanti



$$Q = 240 \text{ MeV}$$

TL di Momento & Energia

Passaggio da \mathcal{K} a $\mathcal{K}' \rightarrow$ trasformazione di Lorentz di:

i. momento

$$p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{v}{c^2} E \right)$$

$$p'_y = p_y \quad p'_z = p_z$$

(Complementi 3.7)

ii. energia

$$E' = \gamma (E - v p_x)$$

$$\text{NB - } v < c, p_x \leq |\vec{p}| \rightarrow v p_x \leq c |\vec{p}| \leq E$$

$$\longrightarrow E > 0 \Rightarrow E' > 0$$

i.e., una TL non può realizzare transizione da stato con $E > 0$ a stato con $E < 0$

Quadrivettori

Due osservazioni importanti:

1. dal punto di vista di una trasformazione di Lorentz

$$\vec{p} \sim \vec{r} \quad \frac{E}{c} \sim ct$$

2. dalle relazioni precedenti, risulta

$$\frac{E'^2}{c^2} - p'^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \quad (\text{Esercizio 1.2.8})$$

i.e., la particolare combinazione di energia e momento nella relazione di “mass shell” è **invariante** sotto TL

➔ introduzione del **4-momento**: $p^\mu = (E/c, \vec{p})$

di **norma**: $p^2 = (E/c)^2 - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2$

Quadrivettori

NB – nella RS, energia e tempo non sono quantità **scalari**, ma componenti “**temporali**” ($\mu = 0$) di un 4-vettore; se fossero scalari sarebbero invarianti sotto “rotazioni” nello spaziotempo, i.e. sotto TL

– due diversi tipi di 4-vettori (oggetti matematici diversi):

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) \quad \text{vettore controvariante (vettore)}$$

$$p_\mu = (p^0, -\vec{p}) \quad \text{vettore covariante (1-forma)}$$

$$\longrightarrow \quad p^2 = p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2 \quad (\text{somma su indici ripetuti } \nearrow \searrow)$$

1. connessione vettore / 1-forma?

$$p_\mu = \eta_{\mu\nu} p^\nu \quad \longrightarrow \quad p^2 = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$$

dove:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{tensore metrico}$$

Quadrivettori

2. parallelo con lo spazio euclideo n -dimensionale:

$$q^2 = q^i q_i = \delta_{ik} q^i q^k \quad (i, k = 1, \dots, n)$$

i.e., ruolo del tensore metrico è svolto dalla matrice unità n -dimensionale

in linea di principio, anche in questo caso dovrei distinguere tra vettori e 1-forme: sono oggetti che si trasformano in modo diverso

perché non lo faccio? perché nello spazio euclideo risulta

$$q_i = q^i$$

diversamente da quanto avviene in uno spazio con metrica pseudoeuclidea, dove le componenti spaziali di un vettore e della 1-forma ad esso associato (i.e., quella che si ottiene abbassando l'indice tramite l'uso del tensore metrico) sono di segno opposto

Quadrivettori

4-velocità: $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{cdt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right)$

τ è il tempo proprio della particella, i.e., il tempo misurato nel proprio riferimento di quiete (la velocità spaziale è riferita al tempo coordinato, i.e., quello misurato in un RI generico)

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \vec{v} \frac{dt}{d\tau} \quad \longrightarrow \quad u^\mu = \frac{dt}{d\tau} (c, \vec{v})$$

NB – connessione t - τ : cfr. dilatazione degli intervalli temporali;
in alternativa, può ricavarsi dall'invarianza dell'intervallo

$$(c dt)^2 - d\vec{x}^2 = (c d\tau)^2 \quad \longrightarrow \quad (c^2 - \vec{v}^2) (dt)^2 = c^2 (d\tau)^2 \quad \longrightarrow \quad dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

per cui: $\frac{dt}{d\tau} = \gamma \quad \longrightarrow \quad \boxed{u^\mu = \gamma (c, \vec{v})} = \frac{p^\mu}{m_0}$

Quadrivettori

NB –
$$u^2 = u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = c^2$$

norma della 4-velocità = c → tutti gli oggetti (anche quelli fermi nello spazio) sono in moto nello spaziotempo con una velocità fissa, quella della luce!! ecco perché interviene nelle eq. di Maxwell: è l'**unica velocità che esiste in natura**

- oggetto in quiete → velocità nel tempo = c
- oggetto in moto → parte della velocità nel tempo trasferita nello spazio → velocità nel tempo diminuisce → orologio in moto rallenta, i.e., moto spaziale “ruba” al moto temporale

si capisce anche perché esista una velocità spaziale limite; massima velocità spaziale possibile è ottenuta quando tutta la velocità nel tempo è trasferita nello spazio: tutta la velocità disponibile nello spaziotempo - c - è usata per muoversi nel solo spazio → particella che si muove con velocità = c non ha velocità nel tempo, i.e., **alla velocità della luce il tempo non passa**

Forza Relativistica

Legge di Newton:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m \vec{v})$$

tanto meno adeguata quanto più velocità prossima a quella della luce; assumo stessa espressione in termini di momento:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

→ in base all'espressione relativistica del momento:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma \vec{v}) \quad \text{legge di Minkowski}$$

dalla quale si ottiene:

$$m \gamma \vec{a} = \vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{v}) \frac{\vec{v}}{c^2} \quad (a)$$

Forza Relativistica

$$\longrightarrow m \gamma^3 (\vec{a} \cdot \vec{v}) = (\vec{F} \cdot \vec{v}) \quad (\text{Complementi 3.9})$$

Scomponendo accelerazione e forza nelle componenti parallela e perpendicolare alla velocità, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{v} &= \vec{a}_{\parallel} \cdot \vec{v} \\ \vec{F} \cdot \vec{v} &= \vec{F}_{\parallel} \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \vec{F}_{\parallel} = m \gamma^3 \vec{a}_{\parallel}$$

Uguagliando separatamente le componenti \parallel e \perp alla velocità dell'identità vettoriale (a):

$$\vec{F}_{\perp} \cdot \vec{v} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{F}_{\perp} = m \gamma \vec{a}_{\perp}$$

i.e., “**inerzia**” di una particella è diversa a seconda che la forza sia \parallel o \perp alla velocità \rightarrow concetti di massa longitudinale & massa trasversale (**obsoleti**)

Azione & Reazione

Newton: se particella 1 esercita forza su particella 2, questa esercita su 1 una forza istante per istante uguale e contraria

$$\vec{F}_{12}(t) = -\vec{F}_{21}(t)$$

RS: questa legge **non è valida**

- ✓ la simultaneità è relativa
- ✓ la velocità della luce è finita → interazioni non sono istantanee

Rimane valida, però, la legge di conservazione dell'impulso (che è l'unica cosa che ci interessa), in quanto conseguenza di una simmetria fondamentale: quella per **traslazioni spaziali** (i.e., in ultima analisi, dell'**omogeneità** dello spazio)

Azione & Reazione

→ introduzione del concetto di **campo** (dotato di quantità di moto, energia, ...)

Fisica relativistica: no forze → descrizione dinamica non in termini di forze, ma di **energia** (di particelle o campi)

- ogni sistema isolato (di particelle e/o campi) è descritto da **Lagrangiana** o **Hamiltoniana**, che combinano l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema
- eq.ni del moto sono ricavate direttamente da queste funzioni, senza la necessità di introdurre le forze
- imponendo le condizioni di invarianza sulla lagrangiana o sull'hamiltoniana si ottengono le **leggi di conservazione**

Dinamica Relativistica

Meccanica Newtoniana: equazione del moto di una particella descritta da legge oraria $\vec{x} = \vec{x}(t)$

RS: t non è uno scalare ma la componente temporale di un 4-vettore, e dipende dal RI \rightarrow parametrizzazione della posizione della particella mediante t comporta la perdita della covarianza \rightarrow difficile giudicare a vista se una data legge fisica è consistente o meno con il **PR**

Esempio: particella carica in campo e.m. \rightarrow **forza di Lorentz**

$$\frac{d}{dt}(m \gamma \vec{v}) = e (\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B})$$

impossibile accertare a vista la covarianza: occorre studiare le leggi di trasformazione delle grandezze che compaiono in entrambi i membri

Dinamica Relativistica

Quale parametro scalare per rappresentare il moto? Scelta naturale: invariante definito da

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\text{NB - } ds^2 = (dx^0)^2 - (d\vec{x})^2 = (c d\tau)^2 \quad \rightarrow \quad ds = c d\tau$$

i.e., stiamo utilizzando come parametro il tempo proprio

→ legge oraria sostituita dalla linea d'universo

$$x^\mu = x^\mu(s)$$

$m \neq 0$ → curva di tipo tempo → lunghezza tra due eventi:

$$s_{AB} = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

Dinamica Relativistica

$m = 0 \rightarrow ds = 0$ linea d'universo di tipo luce \rightarrow necessario parametro scalare diverso:

$$x^\mu = x^\mu(\xi) \quad \text{con vincolo} \quad ds^2 = 0$$

Come ottengo legge oraria $\vec{x}(t)$?

- ricavo variabile t , in un certo RI, risolvendo equazione

$$x^0(\xi) = ct$$

- ottengo funzione

$$\xi(t)$$

- ... che sostituisco in quelle

$$x^i(\xi) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Dinamica Relativistica

1. Particella libera di massa $\neq 0$: versione relativistica (covariante) delle equazioni del moto:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = 0 \quad \text{con vincolo} \quad p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$$

equivalenti alle ben note equazioni (non covarianti):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

Poiché

$$p^\mu = m u^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

→

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0 \quad \text{con vincolo} \quad ds^2 = dx^\mu dx_\mu$$

i.e., linea d'universo di una particella libera nello spazio di Minkowski è una retta

Dinamica Relativistica

NB – vincoli \rightarrow soltanto 3 delle 4 componenti delle eq.ni covarianti sono indipendenti


– $\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \propto w^\mu \rightarrow$ eq.ni del moto: $w^\mu = 0$

– particelle di massa = 0 \rightarrow parametro scalare ξ :

$$\frac{dp^\mu}{d\xi} = 0 \quad p^2 = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\xi^2} = 0 \quad ds^2 = 0$$

2. Particella soggetta ad interazioni \rightarrow equazione (covariante) di Minkowski:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \mathcal{F}^\mu$$

 **4-forza**

NB – $p^\mu \propto u^\mu \rightarrow \mathcal{F}^\mu \propto w^\mu \rightarrow \mathcal{F}^\mu u_\mu = 0$

i.e., 4-forza e 4-velocità sono ortogonali tra loro

Dinamica Relativistica

$$p^\mu = (c^{-1} E, \vec{p})$$



$$\mathcal{F}^0 = \frac{dp^0}{ds} = \frac{\gamma}{c^2} \frac{dE}{dt}$$

$$ds = c d\tau = c \gamma^{-1} dt$$

$$\mathcal{F}^k = \frac{dp^k}{ds} = \frac{\gamma}{c} \frac{dp^k}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

(Complementi 3.10)



$$\mathcal{F}^\mu = \frac{\gamma}{c} (\vec{F} \cdot \vec{\beta}, \vec{F})$$

NB – tratto peculiare della RS: la 4-forza dipende dalla velocità della particella (direttamente e/o tramite il fattore lorentziano)

relazione 4-forza – 4-velocità \rightarrow tensore a 2 indici:

$$\mathcal{F}^\mu = f^{\mu\nu}(x) u_\nu$$

Dinamica Relativistica

$$\text{NB - } \mathcal{F}^\mu u_\mu = 0 \quad \rightarrow \quad f^{\mu\nu} u_\nu u_\mu = 0 \quad \rightarrow \quad f^{\mu\nu} = -f^{\nu\mu}$$

$f^{\mu\nu}(x)$ è antisimmetrico

Esempio - 4-forza agente su particella carica in campo elettromagnetico: **4-forza di Lorentz**

$$f^{\mu\nu}(x) = \frac{e}{c} F^{\mu\nu}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{tensore del campo e.m.}$$

Dinamica Relativistica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \oplus \text{ potenziale elettrico } \varphi$$

→ introduzione del 4-potenziale del campo: $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$

$$\longrightarrow \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (\partial^\alpha = \partial/\partial x_\alpha)$$

NB – F è invariante per **trasformazioni di gauge** del 4-potenziale:

$$A^\mu(x) \quad \rightarrow \quad A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \partial^\mu \Lambda(x)$$

→ **il fotone non ha carica elettrica**

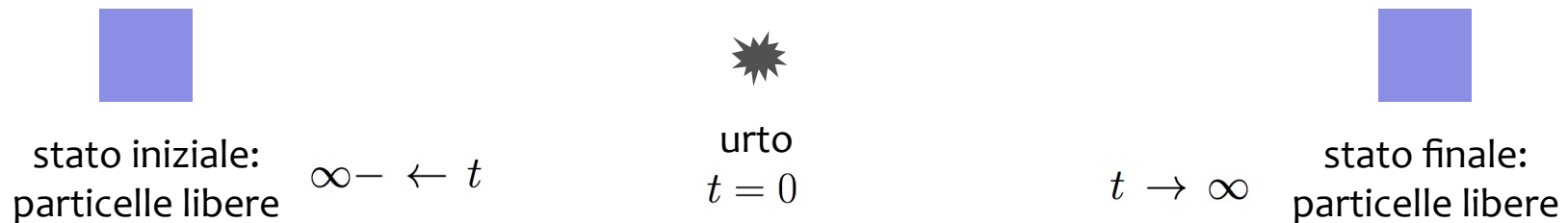
NO 4-forza per il campo gravitazionale: descrizione della gravità con la **RS** (i.e., come interazione nello spazio piatto di Minkowski) → teorie in disaccordo con le osservazioni sperimentali → **Relatività Generale**: **gravità = curvatura dello spaziotempo**

Processi d'urto

Due particelle interagiscono modificando il proprio stato di moto ed eventualmente la loro natura

NB – nessun “contatto”: se inviamo l'una contro l'altra due particelle con carica elettrica dello stesso segno, prima di arrivare a contatto esse deviano dalla loro linea di volo iniziale andando in direzioni opposte → **diffusione** (scattering)

Ipotesi fondamentale: il processo si svolge in una regione spaziotemporale di estensione molto piccola



Processi d'urto

Urti tra particelle sono governati da tre interazioni: elettromagnetica, debole e forte; interazione gravitazionale gioca ruolo trascurabile (gravità estremamente meno intensa delle altre forze → ????)

Modalità sperimentale: fascio di particelle proveniente da un acceleratore è inviato su bersaglio (**esperimenti a “targhetta” fissa**), oppure fatto collidere con un altro fascio che si muove in senso contrario (**anelli di collisione**)

Rivelatori posti dietro (primo caso) e/o attorno (secondo caso) alla regione d'urto → misura delle caratteristiche delle particelle finali: natura, energia, direzione, numero, ...

Processi d'urto

due tipi fondamentali di urti:

- **elastico** = particelle uscenti sono dello stessa natura di quelle entranti:

$$1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$$

esempio: $e^- + p \rightarrow e^- + p$

- **anelastico** = numero e/o natura delle particelle cambiano:

$$1 + 2 \rightarrow 1' + 3$$

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

$$1 + 2 \rightarrow 1' + 2' + 3 + \dots$$

esempio: $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$

$$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^- + \pi^0$$

Processi d'urto

generico processo d'urto con produzione di $N - 2$ particelle

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + N$$

conservazione energia totale + conservazione momento totale \rightarrow conservazione 4-momento totale:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu + \dots + p_N^\mu \quad (\text{a})$$

prima e dopo l'urto le particelle sono asintoticamente libere
 \rightarrow singoli 4-momenti devono verificare mass-shell, i.e.

$$p_i^2 = E_i^2 - \vec{p}^2 = m_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{b})$$

Attenzione: per semplificare la scrittura delle formule, come usuale in cinematica relativistica, da qui in poi è posto $c = 1$

Processi d'urto

1 uguaglianza 4-vettoriale (a) + N relazioni scalari (b) $\rightarrow 4 + N$
condizioni imposte sulle $4N$ componenti dei 4-momenti delle
particelle \rightarrow n. variabili indipendenti: $4N - (4 + N) = 3N - 4$

Inoltre, libertà di scegliere:

- ✓ mediante **rotazione**, la direzione lungo cui avviene urto $\rightarrow 3$ vincoli
- ✓ mediante **boost**, il RI in cui studiare urto $\rightarrow 3$ vincoli

\rightarrow ulteriore riduzione di **6**: delle $4N$ componenti dei 4-momenti delle particelle, quelle indipendenti sono $3N - 10$

NB – **una** di queste variabili, e.g. l'energia totale dello stato iniziale, fissata nella preparazione dell'esperimento

Processi d'urto

2 riferimenti principali in cui analizzare l'urto:

LAB

una delle particelle iniziali, e.g. la 2, è in quiete
asse di collisione coincidente con z

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad p_1^\mu &= (E_1, 0, 0, p) & p_2^\mu &= (m_2, 0, 0, 0) \\ E_1 &= \sqrt{p^2 + m_1^2} \end{aligned}$$

CM

RI in cui momento totale particelle iniziali è nullo

$$\begin{aligned} \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* &= 0 \quad \rightarrow \quad |\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_2^*| = p^* \\ \longrightarrow \quad p_1^{*\mu} &= (E_1^*, 0, 0, p^*) & p_2^{*\mu} &= (E_2^*, 0, 0, -p^*) \\ E_k^* &= \sqrt{p^{*2} + m_k^2} & (k &= 1, 2) \end{aligned}$$

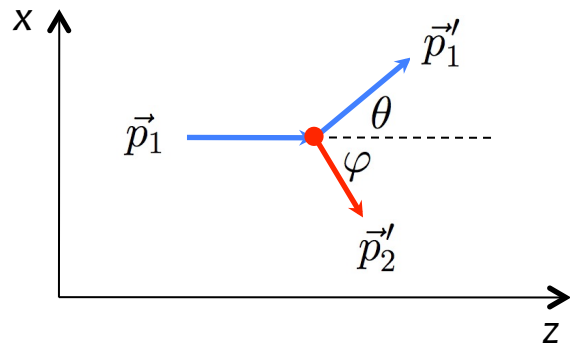
$$\text{NB - } 1 \equiv 2 \quad \rightarrow \quad E_1^* = E_2^*$$

Processi d'urto

➤ Caso di urto elastico: $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$

(Complementi 3.13)

LAB



$$p_1'^{\mu} = (E_1', |\vec{p}_1'| \sin \theta, 0, |\vec{p}_1'| \cos \theta)$$

$$p_2'^{\mu} = (E_2', -|\vec{p}_2'| \sin \varphi, 0, |\vec{p}_2'| \cos \varphi)$$

Per la conservazione del 4-momento:

$$(p_1 + p_2 - p_1')^{\mu} = p_2'^{\mu}$$

i.e., uguagliando la norma dei due membri

$$p_1^2 + p_2^2 + p_1'^2 + 2 p_1 \cdot p_2 - 2 p_1 \cdot p_1' - 2 p_2 \cdot p_1' = p_2'^2$$

Processi d'urto

$$\begin{aligned} p_1^2 = p_1'^2 = m_1^2 \\ p_2^2 = p_2'^2 = m_2^2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad m_1^2 + p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_1' - p_2 \cdot p_1' = 0$$

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= m_2 E_1 \\ p_2 \cdot p_1' &= m_2 E_1' \end{aligned} \quad p_1 \cdot p_1' = E_1 E_1' - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1' = E_1 E_1' - p_1 p_1' \cos \theta$$

$$\longrightarrow \quad m_1^2 + m_2 E_1 - m_2 E_1' - E_1 E_1' - p_1 p_1' \cos \theta = 0$$

$$p_1' = \sqrt{E_1'^2 - m_1^2} \quad \longrightarrow \quad \text{eq.ne di 2^\wedge grado in } E_1' \text{ con coefficienti:}$$

$$a = (E_1 + m_2)^2 - p_1^2 \cos^2 \theta$$

$$b = -2(E_1 + m_2)(m_1^2 + m_2 E_1)$$

$$c = (m_1^2 + m_2 E_1)^2 m_1^2 p_1^2 \cos^2 \theta$$

Processi d'urto

$$\rightarrow E'_1 = \frac{(E_1 + m_2)(m_1^2 + m_2 E_1) + p_1^2 \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta}}{(E_1 + m_2)^2 - p_1^2 \cos^2 \theta}$$

Con procedura analoga, partendo da

$$(p_1 + p_2 - p'_2)^\mu = p_1'^\mu$$

si ottiene:
$$E'_2 = m_2 \frac{(E_1 + m_2)^2 + p_1^2 \cos^2 \varphi}{(E_1 + m_2)^2 - p_1^2 \cos^2 \varphi}$$

NB – $m_2 < m_1 \rightarrow$ deve essere: $\sin \theta < m_2/m_1$

\rightarrow no diffusione ad angoli maggiori di: $\bar{\theta} = \arcsin(m_2/m_1)$

$$- m_1 = m_2 = m \rightarrow E'_1 = m \frac{(E_1 + m)^2 + p_1^2 \cos^2 \theta}{(E_1 + m)^2 - p_1^2 \cos^2 \theta} \quad E'_2 = E'_1(\theta \rightarrow \varphi)$$

Processi d'urto

CM

- stato iniziale

$$p_1^{*\mu} = (E_1^*, 0, 0, p^*) \quad p_2^{*\mu} = (E_2^*, 0, 0, -p^*)$$

$$\text{dove: } p^* = |\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_2^*|$$

- stato finale

$$p_1'^{\mu} = (E_1'^*, p'^* \sin \theta^*, 0, p'^* \cos \theta^*)$$

$$p_2'^{\mu} = (E_2'^*, -p'^* \sin \theta^*, 0, -p'^* \cos \theta^*)$$

$$\text{dove: } p'^* = |\vec{p}_1'^*| = |\vec{p}_2'^*|$$

$$E_1^* + E_2^* = E_1'^* + E_2'^*$$

$$\text{NB - } 1 \equiv 2 \rightarrow E_1^* = E_2^* = E^* \quad E_1'^* = E_2'^* = E'^* \quad \rightarrow \quad p'^* = p^*$$

Processi d'urto

➤ Caso di urto anelastico

a) processi di formazione: $1 + 2 \rightarrow 3$

LAB

particella 2 ferma $p_1^\mu = (E_1, \vec{p}_1)$ $p_2^\mu = (m_2, \vec{0})$

$$\longrightarrow p_3^\mu = (E_1 + m_2, \vec{p}_1) \quad \longrightarrow m_3^2 = (E_1 + m_2)^2 - p_1^2$$

$$\begin{aligned} \text{i.e.} \quad m_3^2 &= E_1^2 + 2 E_1 m_2 + m_2^2 - p_1^2 \\ &= m_1^2 + 2 E_1 m_2 + m_2^2 \\ &= (m_1 + m_2)^2 - 2 m_1 m_2 + 2 E_1 m_2 \end{aligned}$$

$$\text{i.e.} \quad m_3^2 = (m_1 + m_2)^2 + 2 m_2 (E_1 - m_1)$$

$$E_1 > m_1 \quad \rightarrow \quad \Delta m = m_3 - (m_1 + m_2) > 0$$

Processi d'urto

NB – conservazione energia: $T_1 + m_1 + m_2 = T_3 + m_3$

i.e. $T_1 = T_3 + \Delta m$

$\Delta m > 0$ → energia cinetica prima dell'urto si trasforma in parte in energia cinetica della particella 3 e in parte in massa

CM

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{p}_3^* = 0$$

i.e., è il riferimento di quiete della particella 3

conservazione energia: $T_1^* + m_1 + T_2^* + m_2 = m_3$

i.e. $T_1^* + T_2^* = \Delta m$

tutta l'energia cinetica dello stato iniziale è convertita in massa

Processi d'urto

b) processi di produzione: $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + N$

possono aver luogo solo se energia dello stato iniziale supera un certo valore di **soglia**

$$W^2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \geq (m_3 + m_4 + \dots + m_N)^2$$

\swarrow massa invariante (Complementi 3.15)

CM

$$W = E_1^* + E_2^* = E^*$$



$$E^* \geq m_3 + m_4 + \dots + m_N$$

LAB

$$\vec{p}_2 = 0 \rightarrow (E_1 + m_2)^2 - p_1^2 \geq (m_3 + m_4 + \dots + m_N)^2$$

i.e. $m_1^2 + m_2^2 + 2 m_2 E_1 \geq (m_3 + m_4 + \dots + m_N)^2$

→ $E_1 \geq \frac{(m_3 + m_4 + \dots + m_N)^2 - (m_1^2 + m_2^2)}{2 m_2}$



Processi d'urto

1. $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$

$$(p_+ + p_-)^\mu = k^\mu \quad \rightarrow \quad (\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-)^2 = \mathbf{k}^2 = 0 \quad (\text{a})$$

i.e. $2m_e^2 + 2\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_- = 0$

* $\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_- \geq m_e^2 \quad \rightarrow \quad (\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-)^2 \geq 4m_e^2$

incompatibile con la (a) \rightarrow questo processo è proibito!

NB – singolo fotone non può produrre una coppia reale elettrone-positrone (processo inverso) a meno che non interagisca con una particella carica (elettrone, protone, nucleo); esso può invece materializzarsi in una coppia virtuale elettrone-positrone, che vive per un tempo limitato e poi si annichila producendo un altro fotone: processo quantistico all'origine del fenomeno di polarizzazione del vuoto

* $\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_- = E_+ E_- - \vec{p}_+ \cdot \vec{p}_-$ CM: $E_+ = E_- = E^*$ $\mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_- = E^{*2} + p^{*2}$
 $\vec{p}_+ = -\vec{p}_- = \vec{p}^*$ \rightarrow $= 2p^{*2} + m_e^2$ 113

Processi d'urto

2. $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$

$$(p_+ + p_-)^\mu = (k_1 + k_2)^\mu \quad \rightarrow \quad (\mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_-)^2 = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2$$

i.e. $m_e^2 + \mathbf{p}_+ \cdot \mathbf{p}_- = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2$

nessuna incompatibilità \rightarrow questo processo è permesso

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 &= E_1 E_2 - \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 \\ &= E_1 E_2 - k_1 k_2 \cos \theta_{\gamma\gamma} \end{aligned}$$

$$m_\gamma = 0 \quad \rightarrow \quad k = E \quad \rightarrow \quad = E_1 E_2 (1 - \cos \theta_{\gamma\gamma})$$

$$\rightarrow \quad m_e^2 + E_+ E_- - \vec{p}_+ \cdot \vec{p}_- = E_1 E_2 (1 - \cos \theta_{\gamma\gamma})$$

NB – collisori e^+e^- (DAΦNE)

$$\begin{array}{lll} E_+ = E_- = E & \vec{p}_+ = -\vec{p}_- = \vec{p} & m_e^2 + E^2 + \vec{p}^2 = 2 E_\gamma^2 \\ E_1 = E_2 = E_\gamma & \theta_{\gamma\gamma} = \pi & \text{i.e. } E_\gamma = E \end{array} \quad \rightarrow$$

tutta la massa iniziale è convertita in energia

Decadimenti

Processo del tipo: $1 \rightarrow 2 + 3 + \dots + N$

Natura statistica del processo \rightarrow legge di decadimento:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

$\lambda =$ probabilità di decadimento per unità di tempo

\rightarrow $N(t) = N(0) e^{-\lambda t}$

$\tau = \frac{1}{\lambda} =$ vita media



$$N(t) = N(0) e^{-t/\tau}$$

Ri più comodo dove analizzare il processo: quello di quiete della particella **1** (coincide con il **CM** delle particelle prodotte)
 \rightarrow conservazione dell'energia:

Decadimenti

$$m_1 = E_2^* + E_3^* + \dots + E_N^*$$

$$E_i^* \geq m_i \quad (i = 2, \dots, N) \quad \rightarrow \quad m_1 \geq m_2 + m_3 + \dots + m_N$$

i.e., affinché particella **1** possa decadere in un certo numero di particelle finali, la sua massa deve essere superiore alla somma delle masse di quest'ultime.

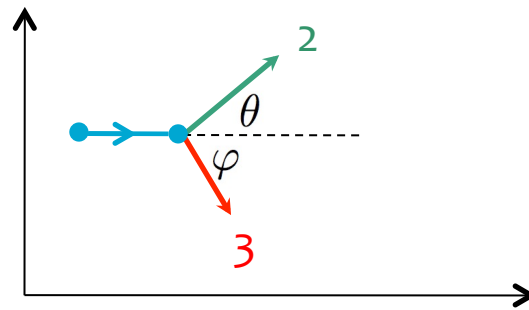
La quantità:

$$Q = m_1 - \sum_{i=2}^N m_i$$

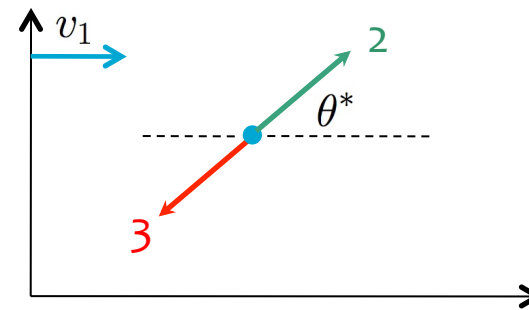
è l'energia disponibile sotto forma di energia cinetica dei prodotti di decadimento

Decadimenti

Esempio: decadimento in 2 corpi, i.e., $1 \rightarrow 2 + 3$



LAB



R (1 in quiete)

R

$$\vec{p}_2^* + \vec{p}_3^* = 0 \quad \rightarrow \quad |\vec{p}_2^*| = |\vec{p}_3^*|$$

NB - per ragioni di simmetria, la distribuzione angolare delle particelle è isotropa, i.e., θ^* qualsiasi

$$\text{i.e.} \quad E_2^{*2} - m_2^2 = E_3^{*2} - m_3^2 \quad \rightarrow \quad E_2^{*2} - E_3^{*2} = m_2^2 - m_3^2$$

Decadimenti

$$E_2^* + E_3^* = m_1 \quad \longrightarrow \quad E_2^* - E_3^* = \frac{m_2^2 - m_3^2}{m_1}$$
$$\downarrow$$
$$E_{2,3}^* = \frac{m_1^2 \pm m_2^2 \mp m_3^2}{2 m_1} \quad \star$$

i.e., energie delle particelle finali completamente determinate dalle masse delle particelle coinvolte nel decadimento

LAB

ottenuto da R tramite boost con velocità $-\vec{v}_1$

- TL dell'impulso

$$|\vec{p}_2| \sin \theta = |\vec{p}_2^*| \sin \theta^* \quad (\beta = |\vec{v}_1|)$$
$$|\vec{p}_2| \cos \theta = \gamma (|\vec{p}_2^*| \cos \theta^* + \beta E_2^*)$$

Decadimenti

→ dividendo membro a membro queste due uguaglianze, si ottiene:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{|\vec{p}_2^*| \sin \theta^*}{\gamma (|\vec{p}_2^*| \cos \theta^* + \beta E_2^*)} = \frac{\sin \theta^*}{\gamma (\cos \theta^* + \beta E_2^* / |\vec{p}_2^*|)} \\ &= \frac{\sin \theta^*}{\gamma (\cos \theta^* + \beta / \beta_2^*)} \quad (\beta_2^* = |\vec{v}_2^*|)\end{aligned}$$

- TL dell'energia

$$\begin{aligned}E_2 &= \gamma (E_2^* + \beta |\vec{p}_2^*| \cos \theta^*) \\ &= \gamma \left(E_2^* + \beta \sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} \cos \theta^* \right) \quad (a)\end{aligned}$$

Decadimenti

Trasformazione inversa della (a):

$$E_2^* = \gamma \left(E_2 - \beta \sqrt{E_2^2 - m_2^2} \cos \theta \right)$$

→ nel LAB, le energie delle particelle prodotte sono correlate agli angoli di emissione

Infatti, da quest' ultima formula, si ricava:

$$\cos \theta = \frac{\gamma E_2 - E_2^*}{\gamma \beta \sqrt{E_2^2 - m_2^2}} \quad \star$$

→ lo spettro di E_2 è limitato: $E_2 \in [E_{\min}, E_{\max}]$

Decadimenti

- max:

$$(a) \rightarrow E_{\max} = E_2(\theta^* = 0)$$

$$\text{i.e.} \quad E_{\max} = \gamma \left(E_2^* + \beta \sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} \right)$$

$$\text{NB -} \quad \theta^* = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = 0$$

i.e., particella **2** emessa nella direzione di volo della particella che decade

- min:

$$(a) \rightarrow E_{\min} = E_2(\theta^* = \pi)$$

$$\text{i.e.} \quad E_{\min} = \gamma \left(E_2^* - \beta \sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} \right)$$

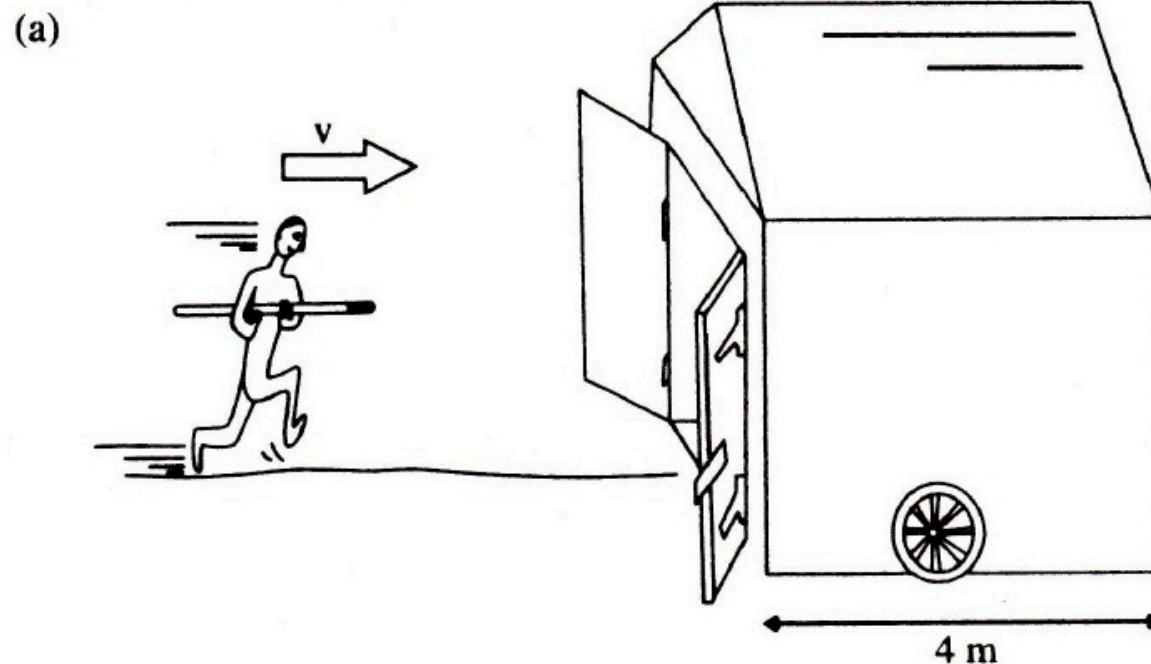
$$\text{NB -} \quad \theta^* = \pi \quad \rightarrow \quad \theta = \pi$$

i.e., particella **2** emessa in direzione opposta a quella di volo della particella che decade

SPARE

Paradosso Asta-Fienile

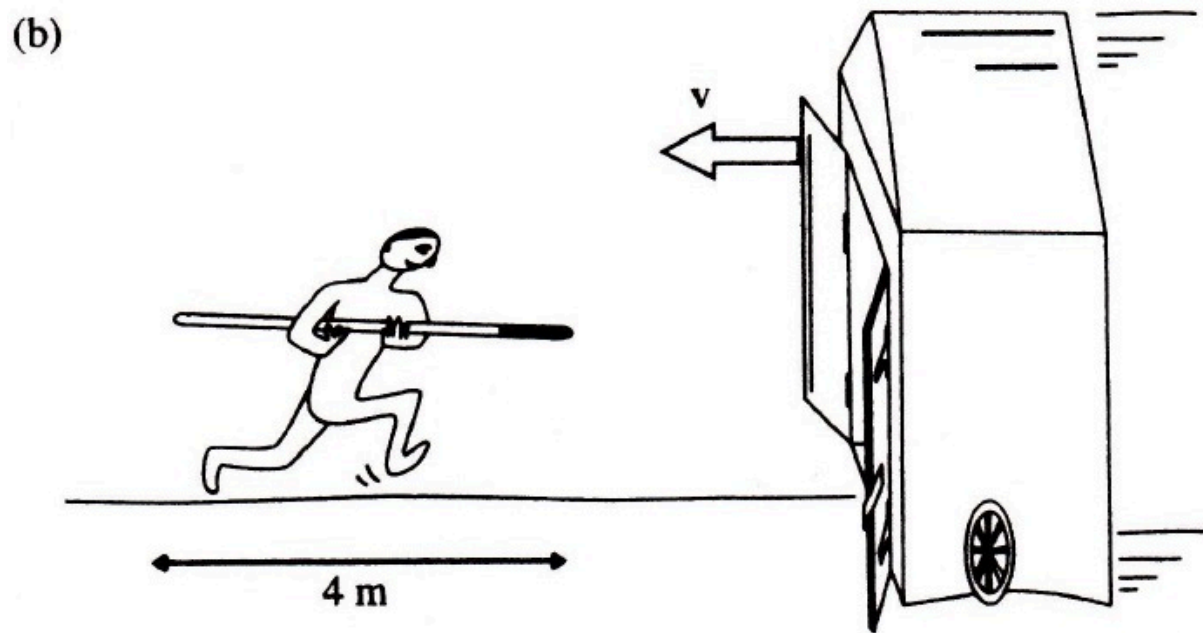
asta e fienile entrambi di lunghezza propria = 4 m; $v \mid \gamma = 2 \rightarrow$
riferimento del fienile: palo è lungo 2 m \rightarrow completamente
contenuto nel fienile



quando coda asta
è entrata nel
fienile, la porta
frontale viene
chiusa; appena
punta giunge alla
porta sul retro,
questa viene
aperta

Paradosso Asta-Fienile

riferimento dell'atleta: fermo con asta di 4 m con un fienile di soli 2 m che gli piomba addosso ad alta velocità → asta non può essere interamente contenuta nel fienile → le porte del fienile non possono essere entrambe chiuse (con l'asta all'interno)

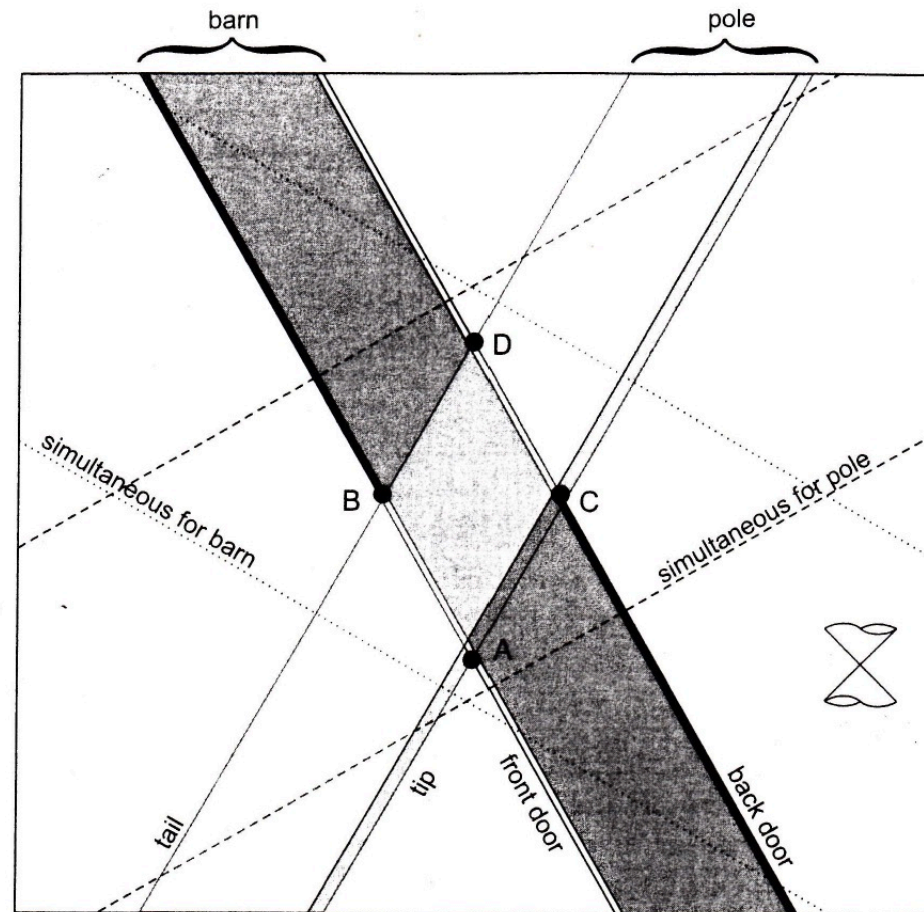


Paradosso Asta-Fienile

diagramma spaziotemporale

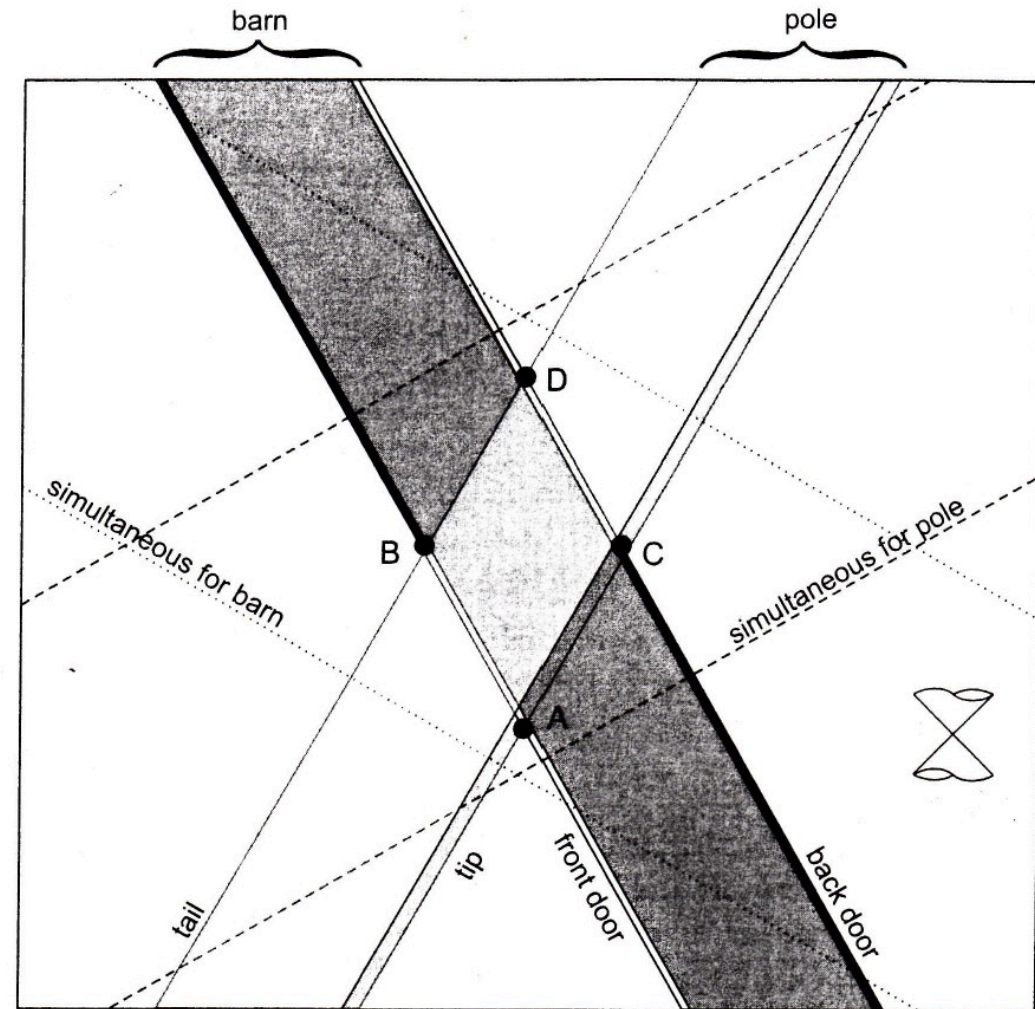
- A = punta asta entra nel fienile
- B = coda asta entra nel fienile →
chiusura porta frontale
- C = punta asta esce dal fienile →
apertura porta posteriore
- D = coda asta esce dal fienile →
chiusura porta posteriore

referimento del fienile:
scivolamento linea di
simultaneità fienile →
sequenza temporale
eventi è **ABCD**



Paradosso Asta-Fienile

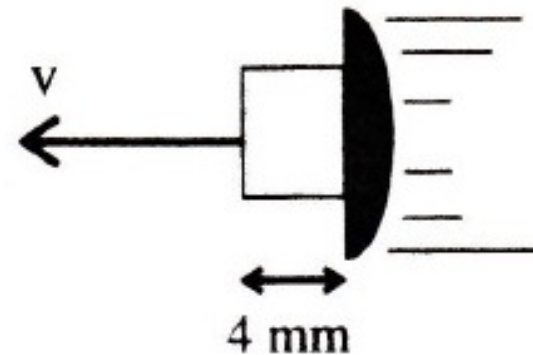
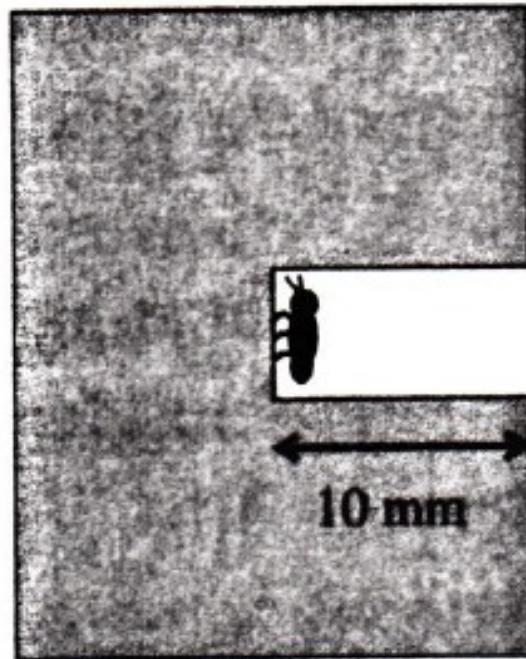
riferimento dell'atleta:
scivolamento linea di
simultaneità dell'asta →
sequenza temporale
eventi è **ACBD**, i.e. punta
asta esce dal fienile (**C**)
prima che la coda
raggiunga la porta
frontale (**B**) → asta mai
interamente contenuta
nel fienile: nessuna
contraddizione: \exists un
singolo insieme di eventi
nello spaziotempo



Paradosso Pulce-Chiodo

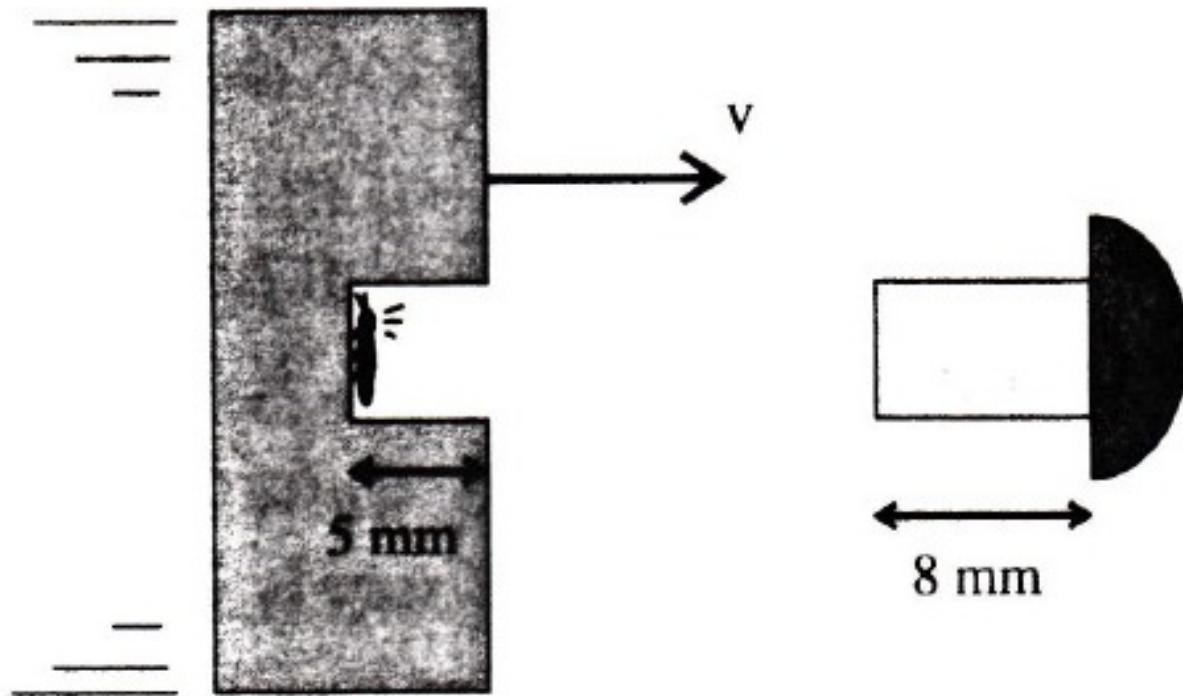
pulce dentro buco profondo 10 mm entro cui viene sparato
chiodo di lunghezza propria 8 mm con $v \mid \gamma = 2$

riferimento della pulce: chiodo lungo 4 mm \rightarrow
la pulce si sente al sicuro



Paradosso Pulce-Chiodo

riferimento del chiodo: buco profondo 5 mm
→ la pulce viene schiacciata



Paradosso Pulce-Chiodo

per la **soluzione del paradosso**, tenere presente che:

1. sorte della pulce non dipende dal riferimento; tutti gli osservatori devono concordare: si può essere in disaccordo solo circa tempo e distanza tra i vari eventi;
2. riferimento da usare per la discussione è quello dove la descrizione è più semplice → **riferimento del chiodo**: la pulce deve morire!

... quando la testa del chiodo arriva all'ingresso del foro, la punta non interrompe il suo moto: info sull'impedimento al moto impiega un po' per arrivare alla punta del chiodo → nel **riferimento della pulce** il chiodo comincia ad allungarsi fino a toccare il fondo, schiacciando la pulce prima di contrarsi alla lunghezza originaria

Paradosso Pulce-Chiodo

