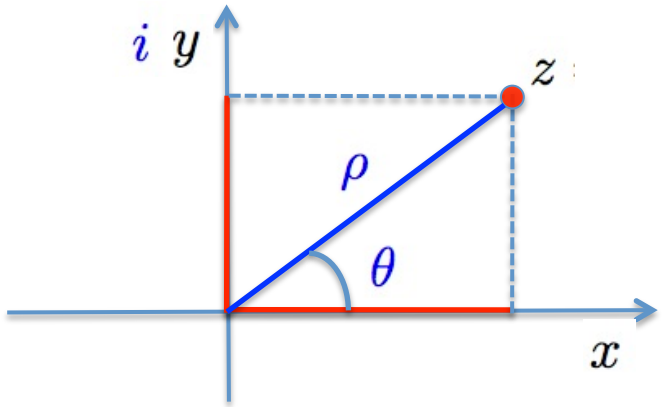
Numeri Complessi

$$x, y \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad z \in \mathbb{C}$$

$$z = x + i\,y$$

$$(i = \sqrt{-1})$$



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(y/x) & (x > 0) \\ \pi + \arctan(y/x) & (x < 0) \end{cases}$$

$$\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$$

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

N.B. – per semplicità, nel seguito considero solo il caso $\rho = 1$

importante proprietà del numero $\boxed{e(\theta) = \cos\theta + i\,\sin\theta}$

$$
\begin{aligned}
e(\theta)\,e(\psi) &= (\cos\theta + i\,\sin\theta)(\cos\psi + i\,\sin\psi) \\
&= \cos\theta\,\cos\psi + i\,\cos\theta\,\sin\psi + i\,\sin\theta\,\cos\psi + i^2\,\sin\theta\,\sin\psi \\
i^2 = -1 \quad \rightarrow \quad &= (\cos\theta\,\cos\psi - \sin\theta\,\sin\psi) + i\,(\cos\theta\,\sin\psi + \sin\theta\,\cos\psi) \\
&= \cos(\theta+\psi) + i\,\sin(\theta+\psi)
\end{aligned}
$$

i.e. $\boxed{e(\theta)\,e(\psi) = e(\theta+\psi)}$

stesso comportamento della funzione esponenziale:

$$e^{x}\,e^{y} = e^{x+y}$$

→ domanda legittima: esiste una relazione tra queste due funzioni?

<u>Ipotesi</u>: $e(\theta) = e^{\alpha\theta}$ → determinazione di α

Definizione di derivata di una funzione:

$$f(x) \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Esempi

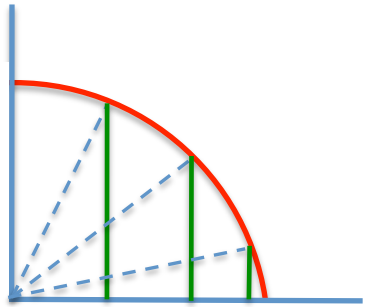
- ✓ $f(x) = \cos x$

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \cos(x+\Delta x) - \cos x \\
&= -2 \sin\left(\frac{x+\Delta x - x}{2}\right) \sin\left(\frac{x+\Delta x + x}{2}\right) \\
&= -2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)
\end{aligned}$$

i.e. $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

N.B. - un limite notevole:

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$



$\longrightarrow$ $\boxed{f'(x) = -\sin x}$

✓ $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sin(x + \Delta x) - \sin x \\
&= 2 \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) \\
&= 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)
\end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$\longrightarrow$

$$\boxed{f'(x) = \cos x}$$

$$\boxed{e'(\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta = i\,(\cos\theta + i\sin\theta) = i\,e(\theta)}$$

✓ $f(x) = a^x$

$$\Delta f = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x\,\left(a^{\Delta x} - 1\right)$$

i.e.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = a^x\,\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$\longrightarrow$

$$f'(x) = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

si può dimostrare che il limite esiste → poniamo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = k$$

per cui:

$$f'(x) = k\, a^x = k\, f(x)$$

i.e., la derivata di una funzione esponenziale è proporzionale alla funzione stessa

Quand'è che il coefficiente di proporzionalità vale 1? i.e., per quale valore della base risulta

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1 \qquad (h = \Delta x) \qquad (1)$$

Supponiamo *h* finito e poniamo:

$$\frac{a^h - 1}{h} = 1 \qquad (2)$$

$$\longrightarrow \qquad a^h = 1 + h \qquad \rightarrow \qquad a = (1+h)^{1/h} \qquad (3)$$

(2) e (3) sono equivalenti → la (1) è equivalente a:

$$a = \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}$$

che è la definizione del numero di Nepero

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.71828\ldots$$

e, quindi:

$$f(x) = e^x \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = e^x$$

Questa è l'unica funzione (a meno di una costante moltiplicativa) che gode di questa proprietà → ruolo centrale della funzione esponenziale nella matematica e nella scienza.

Quindi, tornando al nostro problema iniziale:

$$e(\theta) = e^{\alpha\theta} \longrightarrow e'(\theta) = \alpha\, e(\theta) \qquad \text{i.e.} \qquad i\, e(\theta) = \alpha\, e(\theta)$$

$$\longrightarrow \quad \alpha = i \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta}$$

N.B. - $(\theta \to -\theta) \equiv (i \to -i) \quad \to \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\sin\theta$

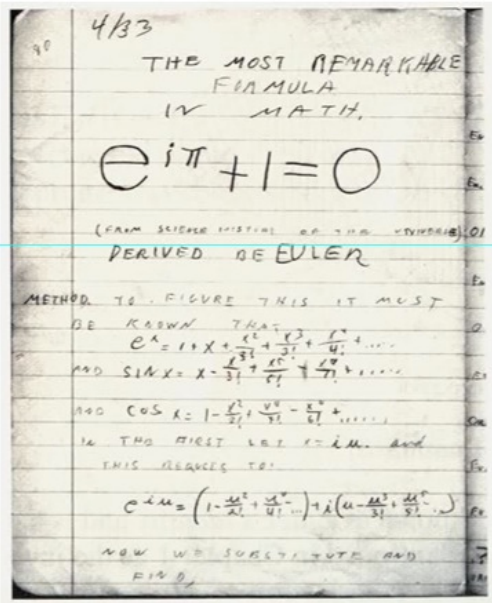
$$\Rightarrow \quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\,\cos\theta$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\,\sin\theta$$

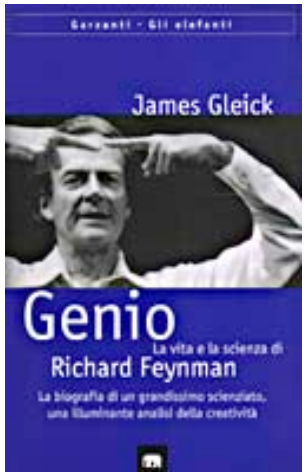
i.e. $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ $\boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$

tutta la (noiosa) trigonometria (faticosamente) imparata a scuola si riduce a manipolazione di funzioni esponenziali.

$\theta = \pi$ $\longrightarrow$ $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\,\sin(\pi) = -1$ (4)



quaderno di appunti di Richard Feynman
(a 15 anni)



eseguendo il logaritmo di ambo i membri della (4), si ottiene:

$$i\,\pi = \ln(-1)$$

chi ha detto che il logaritmo di un numero negativo non esiste?

$$\theta = \pi/2 \qquad \longrightarrow \qquad e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\,\sin(\pi/2) = i \qquad (5)$$

$$\longrightarrow \qquad \ln i = i\,\frac{\pi}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\pi = \frac{2}{i}\,\ln i}$$

elevando alla unità immaginaria la (5), si ha:

$$(e^{i\pi/2})^i = i^i \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{i^i = e^{-\pi/2}} \quad = 0.2078\,795\,763\ldots$$

N.B. – questo è solo uno dei possibili valori

$$i^i = \left[e^{i\,(\pi/2 + 2\pi n)}\right]^i \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

$$= e^{-(\pi/2 + 2\pi n)} = e^{-(1/2 + 2n)\pi}$$

i.e.

$$n = 1 \quad \rightarrow \quad e^{-5\pi/2} = 3.882 \times 10^{-4}$$

$$n = 2 \quad \rightarrow \quad e^{-9\pi/2} = 7.2495 \times 10^{-7}$$

$$n = -1 \quad \rightarrow \quad e^{3\pi/2} = 111.3178$$

Quando si lavora nel campo complesso occorre sempre porre attenzione al problema dei valori multipli, se non si vuole incorrere in assurdità

Ad esempio:

$$z \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad e^{\ln z} = z \qquad (6)$$

$$\ln e^{z} = z \qquad (7)$$

$z \in \mathbb{C} \longrightarrow$ la (6) è ancora vera, ma la (7) può NON esserlo

Facendo il quadrato della relazione di Eulero, otteniamo:

$$e^{i\pi} = -1 \quad \rightarrow \quad e^{i2\pi} = 1 \quad \longrightarrow \quad \ln\left(e^{i2\pi}\right) = \ln(1)$$

i.e. $i2\pi \ln e = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{i2\pi = 0}$

dove abbiamo sbagliato?

incredibile, ma vero, abbiamo definito male il numero 1

Nel campo complesso, dobbiamo scrivere:

$$1 = e^{i\,2\,\pi\,n} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\longrightarrow \qquad \boxed{\ln(1) = i\,2\,\pi\,n}$$

i.e. $\ln(1)$ è un numero complesso con parte reale nulla

$$\Re\,[\,\ln(1)\,] = 0$$

$$\Im\,[\,\ln(1)\,] = 2\,\pi\,n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

La funzione esponenziale

Nelle applicazioni si osservano numerosi fenomeni in cui il tasso di variazione di certe grandezze è proporzionale al valore della grandezza stessa. Questo significa che il processo è governato da un'equazione del tipo:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \alpha\, f(x)$$

la cui soluzione è: $f(x) = C\, e^{\alpha x}$

dove la costante moltiplicativa è determinata dalla condizione iniziale del processo: $C = f(0)$

1. *decadimento di un nucleo radioattivo*

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\alpha\, N \qquad \rightarrow \qquad N(t) = N(0)\, e^{-t/\tau}$$

$\tau = 1/\alpha$ è la vita media del nucleo:

$$N(\tau) = N(0)/e$$

2. *raffreddamento degli oggetti*

oggetto a temperatura T_0 posto in una riserva di calore a temperatura T_1 ($< T_0$); ipotesi: T_1 rimane costante durante il processo

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha\,(T - T_1) \qquad \rightarrow \qquad T = T_1 + (T_0 - T_1)\,e^{-\alpha t}$$

(legge del raffreddamento di Newton)

3. *crescita di popolazione* segue legge (approssimativamente) esponenziale

$$P(t) = C\,e^{\alpha t}$$

N.B. – l'integrale dell'esponenziale coincide con la funzione stessa

$$C\int_{-\infty}^{T} \mathrm{d}t\,e^{\alpha t} = \frac{C}{\alpha}\,e^{\alpha t}\Big|_{-\infty}^{T} = \frac{C}{\alpha}\left(e^{\alpha T} - e^{\alpha(-\infty)}\right) = C\,\frac{e^{\alpha T}}{\alpha} = \frac{P(T)}{\alpha}$$

$\alpha > 1$ → n. viventi attuale > n. esseri umani esistiti finora!!

Matematica dell'Interferenza

Nel calcolo del pattern d'interferenza associato alle due fenditure ho necessità della identità trigonometrica

$$\cos\theta + \cos\psi = 2\,\cos\left(\frac{\theta+\psi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta-\psi}{2}\right)$$

Il calcolo può eseguito anche utilizzando la formula di Eulero. Ciascuna onda è rappresentata come un numero complesso: la sua parte reale la vera quantità fisica

$$A = A_1\,e^{i\,(\omega t+\theta)} + A_2\,e^{i\,(\omega t+\psi)} = \left(A_1\,e^{i\,\theta} + A_2\,e^{i\,\psi}\right)\,e^{i\,\omega t} \qquad (\omega = 2\,\pi\nu)$$

per cui:

$$\begin{aligned} |\,A\,|^2 &= \left(A_1\,e^{i\,\theta} + A_2\,e^{i\,\psi}\right)\,e^{i\,\omega t}\,\left(A_1\,e^{-i\,\theta} + A_2\,e^{-i\,\psi}\right)\,e^{-i\,\omega t} \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1\,A_2\,e^{i\,(\theta-\psi)} + A_1\,A_2\,e^{-i\,(\theta-\psi)} \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2\,\cos(\theta-\psi) \end{aligned}$$

Il vantaggio nell'uso della formula di Eulero diviene evidente quando devo fare la somma di tante onde. Ad esempio, supponiamo di dover sommare le onde emesse da *N* sorgenti di uguale frequenza (ν) e ampiezza (A), sfasate tra loro di una fase costante ϕ

$$\mathcal{A} = A\left[e^{i\omega t} + e^{i(\omega t+\phi)} + e^{i(\omega t+2\phi)} + \ldots + e^{i(\omega t+(N-1)\phi)}\right]$$

$$= A\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(\omega t+k\phi)} = A\,e^{i\omega t}\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\phi}$$

$$= A\,e^{i\omega t}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{i\phi}\right)^k$$

N.B – somma di progressione geometrica di ragione *q*

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots q^{N-2} + q^{N-1}$$

$$\longrightarrow \qquad q\,S_N = q + q^2 + \ldots q^{N-1} + q^N = S_N - 1 + q^N$$

$$\longrightarrow \qquad 1 - q^N = (1-q)\, S_N \qquad \rightarrow \qquad \boxed{S_N = \frac{1-q^N}{1-q}}$$

Nel nostro caso:

$$q = e^{i\phi} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{i\phi}\right)^k = \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}}$$

per cui

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= A\, e^{i\omega t}\, \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}} \\
&= A\, e^{i\omega t}\, e^{iN\phi/2}\, \frac{e^{-iN\phi/2} - e^{iN\phi/2}}{e^{i\phi/2}\left(e^{-i\phi/2} - e^{i\phi/2}\right)} \\
&= A\, e^{i\omega t}\, e^{i(N-1)\phi/2}\, \frac{-2\,i\,\sin(N\phi/2)}{-2\,i\,\sin(\phi/2)} \\
&= A\, e^{i\omega t}\, e^{i(N-1)\phi/2}\, \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}
\end{aligned}$$

$$\longrightarrow \qquad |\mathcal{A}| = A\, \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}$$

N.B. ➢ $$\lim_{\phi\to 0} |\mathcal{A}| = A \lim_{\phi\to 0} \frac{\sin(N\,\phi/2)}{\sin(\phi/2)} = A \lim_{\phi\to 0} \frac{(N\,\phi/2)\,\sin(N\,\phi/2)/(N\,\phi/2)}{(\phi/2)\,\sin(\phi/2)/(\phi/2)}$$

$$= A\,N \frac{\lim_{\phi\to 0} \frac{\sin(N\,\phi/2)}{N\,\phi/2}}{\lim_{\phi\to 0} \frac{\sin\phi/2}{\phi/2}} = A\,N$$

(e, più in generale, per $\phi = 2\,n\,\pi$)

➢ $$|\mathcal{A}| = 0 \quad \rightarrow \quad \sin(N\,\phi/2) = 0 \quad \rightarrow \quad N\,\frac{\phi}{2} = n\,\pi \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

i.e. $$\phi = \frac{n}{N}\,2\,\pi$$

Per questi valori della fase la funzione consegue (ovviamente) i suoi valori minimi. E i massimi dove sono? Quanto vale la funzione in questi punti? (compito per casa)

Sviluppo in serie di Taylor

Rappresentazione di funzione arbitraria nell'intorno di un punto x_0 all'interno del suo campo di definizione → serie di potenze di Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}\bigg|_{x=x_0} (x - x_0)^k \qquad \left(k! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (k-1) \times k\right)$$

$$x_0 = 0 \quad \rightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}\bigg|_{x=0} x^k$$

$$f(x) = e^x \qquad \frac{\mathrm{d}^k (e^x)}{\mathrm{d}x^k} = e^x \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^k (e^x)}{\mathrm{d}x^k}\bigg|_{x=0} = 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

$$x = i\,\theta \qquad \rightarrow \qquad e^{i\,\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{\theta^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2\,k} \frac{\theta^{2\,k}}{(2\,k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{(2\,k+1)} \frac{\theta^{(2\,k+1)}}{(2\,k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (i^2)^k \frac{\theta^{2\,k}}{(2\,k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i\,(i^2)^k \frac{\theta^{(2\,k+1)}}{(2\,k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2\,k}}{(2\,k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{(2\,k+1)}}{(2\,k+1)!}$$

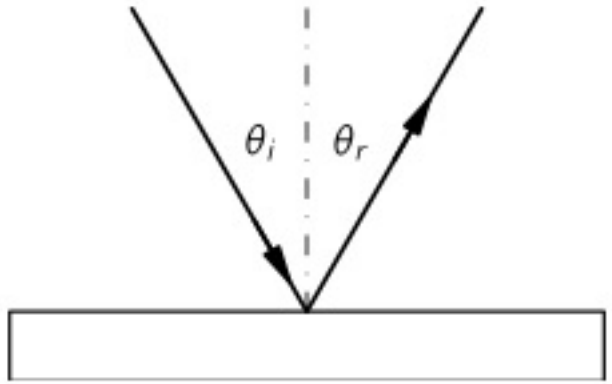
da cui, confrontando con la formula di Eulero, si ottiene:

$$\cos\theta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2\,k}}{(2\,k)!} = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + \dots$$

$$\sin\theta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2\,(k+1)}}{(2\,k+1)!} = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + \dots$$

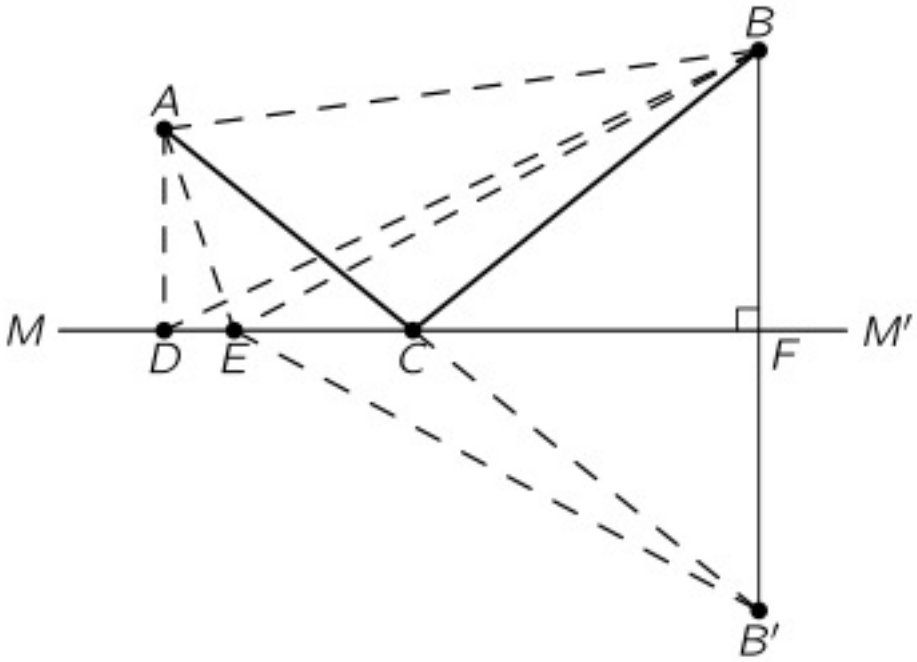
(ed ecco dimostrato che per $\theta \rightarrow 0$ il seno dell'angolo approssima l'angolo stesso)

Legge della riflessione



qual è la legge che determina questo comportamento?

Principio del tempo minimo (Fermat): *di tutti i cammini possibili per andare da un punto ad un altro, la luce segue quello che richiede il tempo di percorrenza più breve*



i cammini sono percorsi a velocità costante → il tempo minimo corrisponde alla distanza minima: percorso rettilineo che collega A con il punto immagine B'

ACB' è una retta → $\widehat{ACD} = \widehat{B'CF} = \widehat{BCF}$ i.e. $\theta_i = \theta_r$

N.B. – Che la luce dovesse seguire il cammino di lunghezza minima l'aveva già detto Erone. Nella rifrazione, però, la luce non segue il percorso di minima lunghezza; ecco perche Fermat avanzò l'idea che fosse il tempo alla base del criterio di minimo

che legge misteriosa! Invece di dire che la propagazione e causale (quando facciamo una cosa, ne accade un'altra), afferma questo: noi creiamo la situazione e la luce "calcola" il tempo più breve e "sceglie" il percorso di conseguenza. Ma come lo trova?

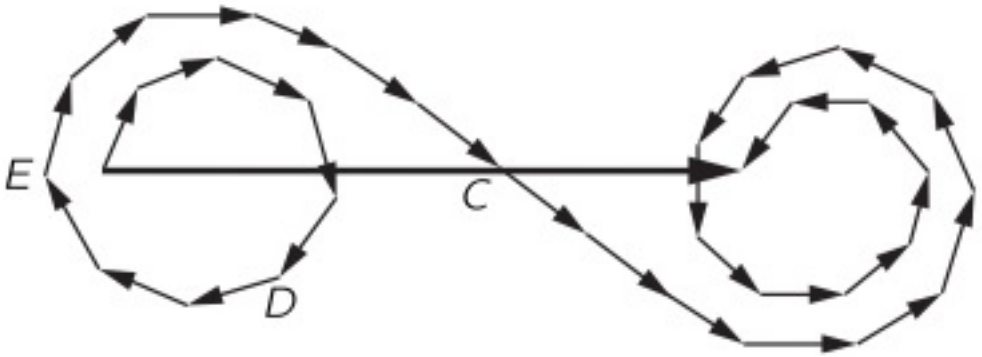
"annusa" i percorsi! a questo che serve la lunghezza d'onda: è, approssimativamente, la distanza su cui la luce "annusa" il percorso per controllarlo

L'intensità luminosa nel punto B è proporzionale al numero medio di fotoni che arrivano per secondo → dobbiamo calcolare la probabilità che un fotone vada da A a B, passando per lo specchio:

- calcolo tempo di percorrenza di ciascun possibile cammino A → specchio → B
- calcolo per ciascun percorso la quantità: $e^{i\omega t_k} \qquad (k \in \mathbb{Z})$

→ probabilità di arrivo del fotone $\propto \left| \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\omega t_k} \right|^2$

rappresentazione grafica della somma: ciascuna vettore corrisponde a $e^{i\omega t_k}$



- il punto C corrisponde al tempo minimo: se consideriamo i percorsi nel suo intorno, il tempo di percorrenza non cambia → i vettori corrispondenti sono all'incirca paralleli
- intorno agli estremi i tempi di percorrenza sono molto diversi → i vettori corrispondenti hanno orientazioni molto diverse

probabilità totale = quadrato della distanza tra i due estremi →
proviene quasi tutta dalla regione dove i vettori sono paralleli;
vettori con orientazioni molto diverse tendono a cancellarsi tra loro