

# Introduzione al Modello Standard delle particelle elementari

Seconda lezione

**Marco Bonvini**

INFN Sezione di Roma

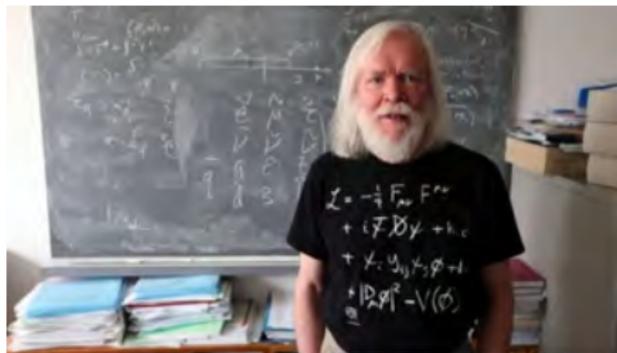
**MasterClass 2021**

Laboratori Nazionali di Frascati

9 Marzo 2022



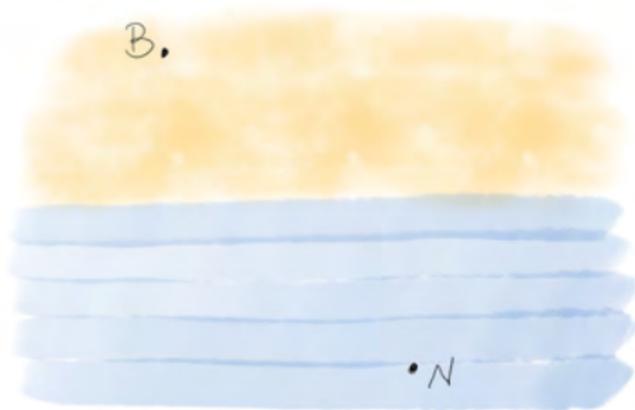
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare  
Sezione di ROMA



John Ellis, CERN

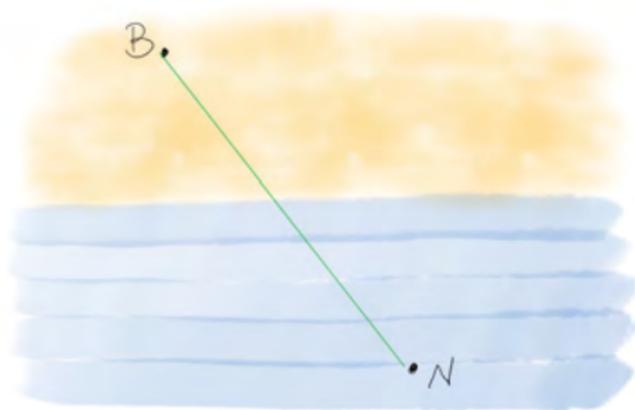
$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & + i\bar{\psi}\not{D}\psi + h.c. \\ & + \chi_i Y_{ij} \chi_j \phi + h.c. \\ & + |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)\end{aligned}$$

Un bagnino sulla spiaggia vede un bagnante in difficoltà in mare.  
Qual'è il percorso che deve fare per raggiungerlo nel minor tempo possibile?



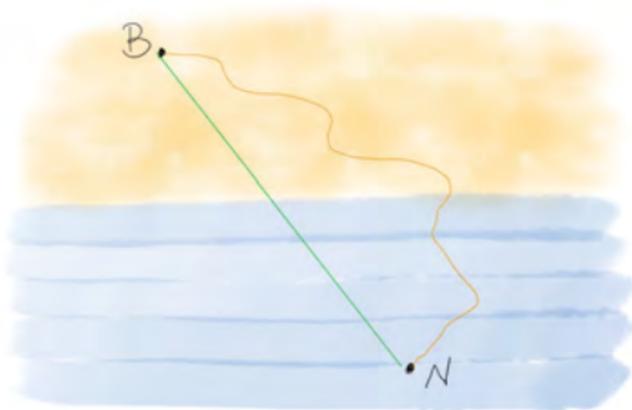
## Interludio tecnico: il bagnino

Un bagnino sulla spiaggia vede un bagnante in difficoltà in mare.  
Qual'è il percorso che deve fare per raggiungerlo nel minor tempo possibile?



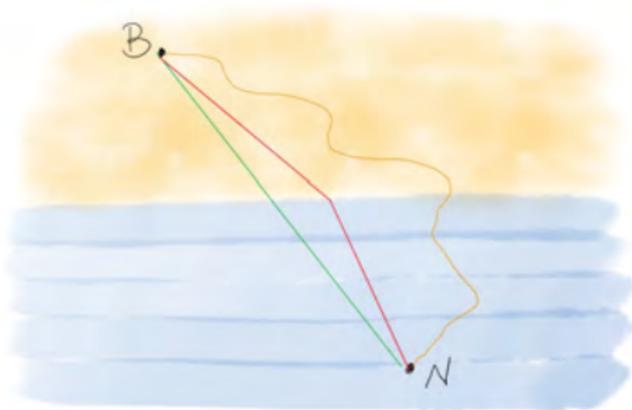
## Interludio tecnico: il bagnino

Un bagnino sulla spiaggia vede un bagnante in difficoltà in mare.  
Qual'è il percorso che deve fare per raggiungerlo nel minor tempo possibile?



## Interludio tecnico: il bagnino

Un bagnino sulla spiaggia vede un bagnante in difficoltà in mare.  
Qual'è il percorso che deve fare per raggiungerlo nel minor tempo possibile?



Il percorso più breve (linea retta) non è il più veloce, perché

$$v_{\text{nuoto}} < v_{\text{corsa}}$$

Quindi il percorso più veloce si otterrà aumentando un po' il percorso sulla spiaggia e diminuendo quello in acqua (curva rossa)

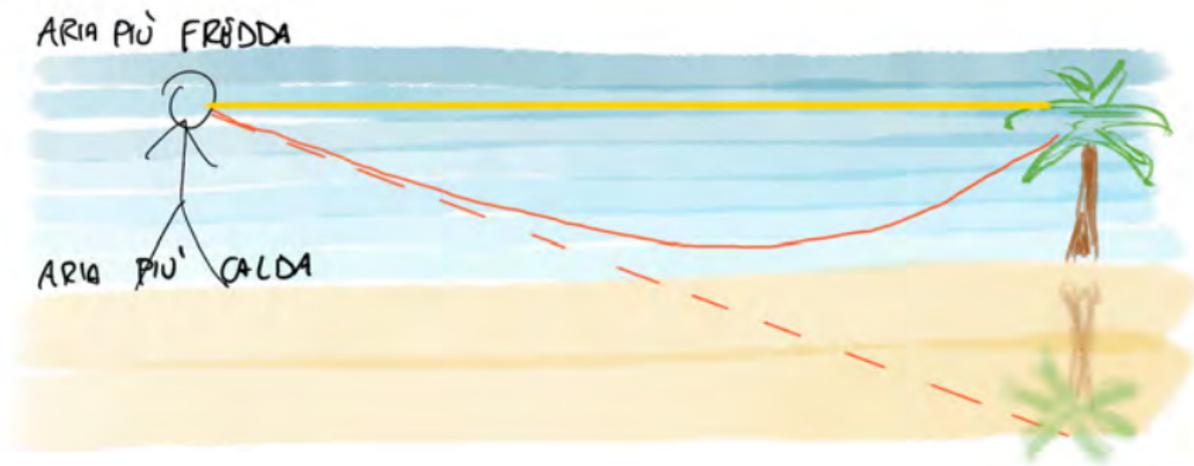
## Interludio tecnico: il principio di minimo tempo

Il problema del bagnino è un esempio di applicazione di un criterio (principio) di minimo: il minimo tempo.

Anche la luce segue un *principio di minimo tempo* nel propagarsi.

In altre parole, un raggio di luce per andare da un punto ad un altro “sceglie” il percorso che minimizza il tempo di percorrenza.

Esempio: il miraggio  $v_{\text{luce}} = c/n$ ,  $n = \text{indice di rifrazione}$



## Interludio tecnico: il principio di minimo tempo

Il problema del bagnino è un esempio di applicazione di un criterio (principio) di minimo: il minimo tempo.

Anche la luce segue un *principio di minimo tempo* nel propagarsi.

In altre parole, un raggio di luce per andare da un punto ad un altro “sceglie” il percorso che minimizza il tempo di percorrenza.

Esempio: il miraggio  $v_{\text{luce}} = c/n$ ,  $n = \text{indice di rifrazione}$



## Interludio tecnico: il principio di minimo tempo

Il problema del bagnino è un esempio di applicazione di un criterio (principio) di minimo: il minimo tempo.

Anche la luce segue un *principio di minimo tempo* nel propagarsi.

In altre parole, un raggio di luce per andare da un punto ad un altro “sceglie” il percorso che minimizza il tempo di percorrenza.

Esempio: il miraggio  $v_{\text{luce}} = c/n$ ,  $n = \text{indice di rifrazione}$



È possibile esprimere le leggi fisiche in termini di un principio di minimo, il cosiddetto **principio di minima azione**.

L'azione  $S$  è una quantità definita in termini di una *lagrangiana*  $L$

$$S = \int dt L, \quad L = K - U$$

dove  $K$  è l'energia cinetica e  $U$  è l'energia potenziale.

Esempio: particella libera di massa  $m$ ,  $K = \frac{1}{2}mv^2$ ,  $U = 0$ ,

$$S = \frac{1}{2}m \int dt v^2(t)$$

Usando le tecniche matematiche del *calcolo delle variazioni* si trova che  $S$  è minima se

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \text{costante}$$

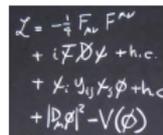
ovvero se il moto è un moto uniforme

Il principio di minima azione si presta bene per la formulazione delle leggi fisiche nel contesto della fisica moderna.

In contesto relativistico, l'azione si scrive

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad d^4x = c dt dx dy dz$$

dove  $\mathcal{L}$  è una *densità lagrangiana* (quella sulle magliette...)


$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + h.c. + \chi_i \psi_j \chi_k \phi + h.c. + |\partial_\mu \phi|^2 - V(\phi)$$

In questo caso si integra non solo sul tempo, ma su tutto lo spazio-tempo

La densità lagrangiana  $\mathcal{L}$  contiene tutte le informazioni sul sistema relativistico. Conoscendola, si può risolvere il moto del sistema usando le tecniche di calcolo variazionale. Quindi la densità lagrangiana  $\mathcal{L}$  è l'oggetto che si deve calcolare o costruire per determinare il sistema relativistico.

Un approccio più moderno è basato sul metodo dell'*integrale sui cammini* introdotto da Feynman nel 1942.

Riprendiamo le equazioni di Maxwell nel vuoto e senza sorgenti:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Si può costruire un oggetto (detto tensore) con la seguente struttura

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Questo tensore elettromagnetico è un oggetto *covariante relativistico* (si comporta bene dal punto di vista della relatività speciale).

Le equazioni di Maxwell nel vuoto e senza sorgenti si possono ricavare usando il principio di minima azione a partire da una densità lagrangiana scritta come

$$\mathcal{L}_{\text{rad}} = -\frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

L'inizio della maglietta!

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &+ i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \text{h.c.} \\ &+ \chi_i y_{ij} \chi_j \phi + \text{h.c.} \\ &+ |\mathcal{D}_{\mu} \phi|^2 - V(\phi)\end{aligned}$$

I campi elettrici e magnetici possono essere derivati da “potenziali”  $\varphi$  e  $\vec{A}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Si definisce un *quadripotenziale elettromagnetico*

$$A^\mu = (\varphi/c, A_x, A_y, A_z)$$

Anche il tensore elettromagnetico  $F^{\mu\nu}$  si può scrivere in termini dei potenziali:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Questo vuol dire, ad esempio,

$$F^{01} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi/c)}{\partial x} = -\frac{E_x}{c}$$
$$F^{13} = \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = B_y$$

**Importante:**

il campo  $A^\mu$  è più fondamentale di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  (effetto di Aharonov-Bohm).

Nella teoria quantistica,  $A^\mu$  è il campo del **fotone**.

La lagrangiana  $\mathcal{L}_{\text{rad}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  descrive solo la *radiazione* elettromagnetica. Per una teoria completa è necessario includere anche la *materia*, che interagisce con la radiazione.

È possibile tradurre la corrente  $\vec{J}$  e la densità di carica  $\rho$  in una corrente quadridimensionale  $J^\mu = (c\rho, J_x, J_y, J_z)$  e scrivere l'interazione tra materia e radiazione attraverso questa quadricorrente:

$$\mathcal{L}_{\text{mat}} = -\sum_{\mu=0}^3 J^\mu A_\mu$$

Dalla lagrangiana completa dell'elettromagnetismo,

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}\sum_{\mu=0}^3\sum_{\nu=0}^3 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \sum_{\mu=0}^3 J^\mu A_\mu$$

si trovano, usando il principio di minima azione, le equazioni di Maxwell con sorgenti e la forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

Tuttavia, a livello quantistico, non vogliamo parlare di correnti, ma delle singole particelle che le compongono

Dobbiamo perciò introdurre le particelle cariche: gli **elettroni**

Gli elettroni sono particelle diverse dai fotoni, in particolare:

- hanno **spin**  $\frac{1}{2}$ , che è una proprietà intrinseca della particella
- sono *fermioni*
- hanno massa  $m = 0.5\text{MeV} = 9 \cdot 10^{-31}\text{kg}$

Per descrivere gli elettroni nella teoria dei campi, servono campi nuovi,  $\psi$ , che sono diversi dal campo  $A^\mu$  del fotone

Per confronto, i fotoni

- hanno **spin 1**
- sono *bosoni*
- hanno massa nulla ( $m = 0$ )

La densità lagrangiana che descrive gli elettroni, introdotta da Dirac, è data da

$$\mathcal{L}_{\text{mat}} = \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - e\gamma_{\mu}A^{\mu} - m)\psi$$

che descrive la propagazione libera di elettroni di massa  $m$  e carica  $e$  e la loro interazione coi fotoni.

( $\gamma_{\mu}$  sono le matrici di Dirac)

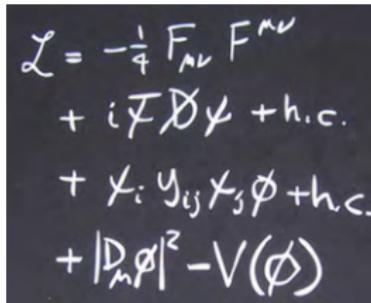
Unendo la radiazione e la materia si ottiene la lagrangiana della QED (quantum electro-dynamics)

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - e\gamma_{\mu}A^{\mu} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

che descrive la dinamica di

$A^{\mu}$ : fotone

$\psi$ : elettrone di massa  $m$  e carica elettrica  $e$



Handwritten Lagrangian for QED:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\not{D}\psi + \text{h.c.} + \chi_i\gamma_{ij}\chi_j\phi + \text{h.c.} + |\mathcal{D}_m\phi|^2 - V(\phi)$$

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - e\gamma_{\mu}A^{\mu} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} : \bullet \text{---} \text{~~~~~} \text{---} \bullet$$

fotone che si propaga

$$\bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - m)\psi : \bullet \text{---} \leftarrow \text{---} \bullet$$

elettrone che si propaga

$$-e\bar{\psi}\gamma_{\mu}A^{\mu}\psi :$$

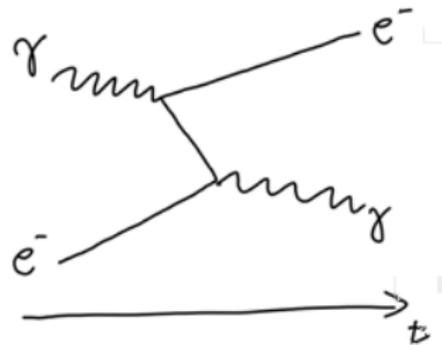
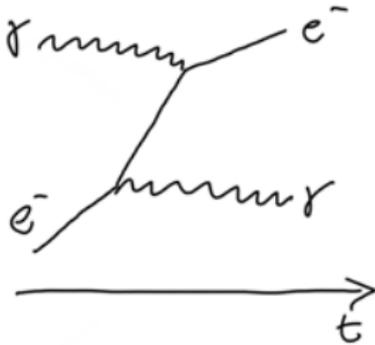

interazione fotone-elettroni

I diagrammi di Feynman sono degli strumenti per calcolare delle quantità osservabili in teoria dei campi, e *non hanno un significato fisico*.

Tuttavia sono utili per schematizzare cosa succede a livello di interazione: è quindi possibile immaginare che rappresentino l'evoluzione nel tempo di un qualche processo, ma questa interpretazione va presa con molta cautela.

# Esempi di diagrammi di Feynman

Consideriamo il processo  $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$



L'interpretazione cambia a seconda di come facciamo il disegno se immagino che rappresenti "quello che succede davvero" in funzione del tempo

In realtà cosa succede davvero non possiamo scoprirlo, questo è solo uno *schema* che rappresenta l'interazione, e ci permette di fare calcoli

Si sente parlare di quattro *forze* fondamentali...

In realtà, il termine forza è specifico e rappresenta la causa del moto.

L'interazione è un concetto più generale, e nel contesto della teoria dei campi rappresenta la possibilità delle particelle di comunicare tra loro e di trasformarsi.

In teoria dei campi le interazioni sono mediate a loro volta da particelle...

Ci sono **due** tipi di particelle:

- le particelle di “materia” (elettroni, quark, ...), che sono *fermioni* (spin  $1/2$ )
- i mediatori delle interazioni (fotoni, gluoni, ...), che sono *bosoni* (spin  $1$ )
- il bosone di Higgs (spin  $0$ )

Le interazioni sono “associate” a **simmetrie** della teoria, dette *simmetrie di gauge*

Le simmetrie sono importantissime!

Ad esempio, la simmetria alla base dell'interazione elettromagnetica implica la **conservazione della carica elettrica!**

*Simmetria* = una *trasformazione* dei campi che lascia l'azione  $S = \int d^4x \mathcal{L}$  invariata:

$$\psi(x) \rightarrow U\psi(x) \quad \Rightarrow \quad S \rightarrow S$$

Una simmetria si dice *locale* (di *gauge*) se la sua azione sui campi è diversa in ogni punto dello spaziotempo

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x)$$

Quando ci sono simmetrie locali, è **necessario** che ci sia un campo vettoriale (come il fotone) che a sua volta si trasforma in modo opportuno sotto l'azione della simmetria

$$A^\mu(x) \rightarrow \dots A^\mu(x) \dots + \dots$$

Il campo vettoriale (fotone) è detto *campo di gauge* e **deve avere massa nulla**

Importante: **i mediatori delle interazioni (campi di gauge) hanno massa nulla.**

## Esempio: la simmetria della QED

La lagrangiana della QED ha una simmetria, ovvero esiste una trasformazione dei campi sotto l'azione della quale la lagrangiana non cambia.

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - e\gamma_{\mu}A^{\mu} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Simmetria *globale* (la stessa per ogni punto dello spaziotempo):

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie\theta}\psi(x)$$

Vale anche a livello *locale*, purché pure il fotone trasformi:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow e^{ie\theta(x)}\psi(x) \\ A^{\mu}(x) &\rightarrow A^{\mu}(x) - \partial^{\mu}\theta(x)\end{aligned}$$

Per ottenere tutta la lagrangiana della QED è possibile partire dalla pura materia

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - m)\psi$$

osservare le sue simmetrie globali, e promuoverle a locali (*gauge*). Per questo ultimo step è *necessario* introdurre il campo del fotone (detto campo di gauge) e aggiungere tutti i termini “mancanti” alla lagrangiana.

Le interazioni fondamentali sono

	intensità relativa	raggio d'azione	mediatori
elettromagnetica	1	$\infty$	fotoni
forte	$10^2$	$10^{-15}\text{m}$	gluoni
debole	$10^{-3}$	$10^{-18}\text{m}$	$W, Z$
gravitazionale	$10^{-36}$	$\infty$	gravitoni?

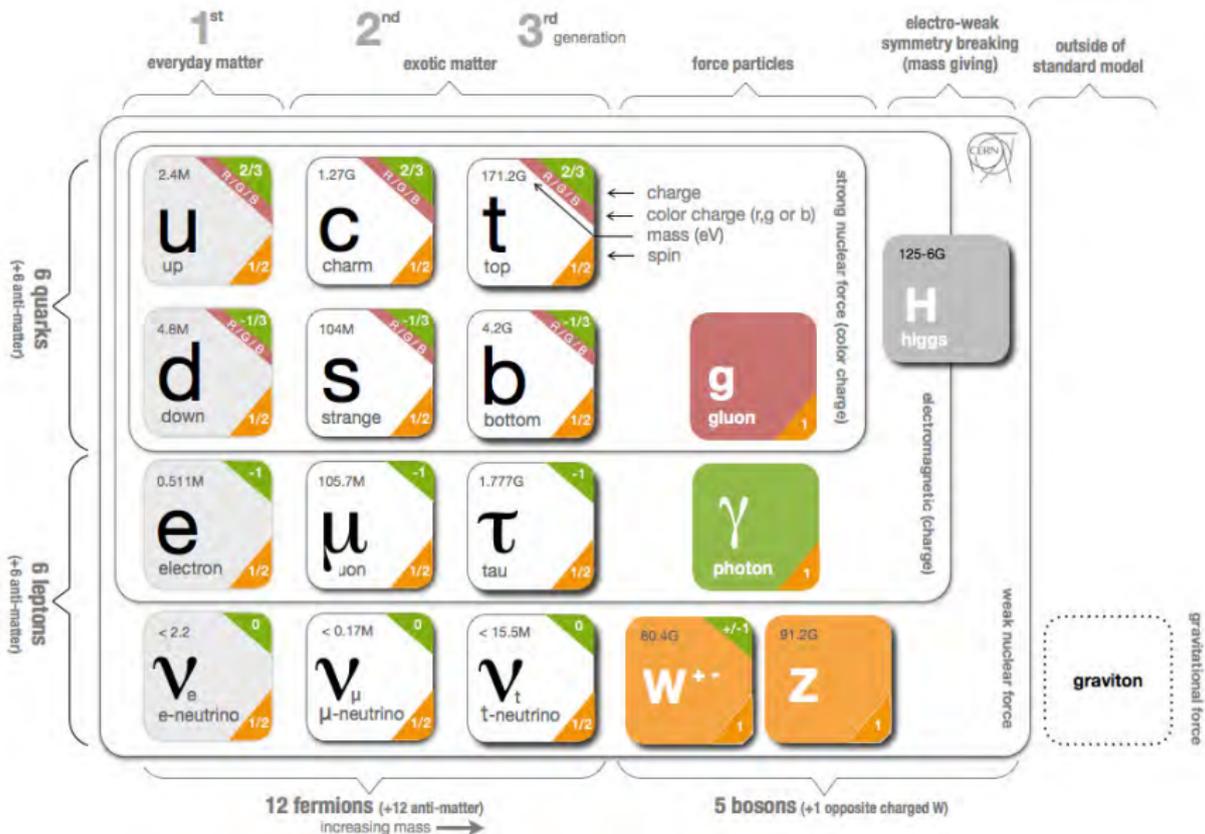
Le prime tre sono descritte dal **Modello Standard delle particelle elementari**

La quarta è molto diversa, ed è descritta dalla *relatività generale* [Einstein 1916]

Il Modello Standard è una teoria di campo basata sulla simmetria

$$\begin{array}{ccc} & \text{SU}(3) \otimes \text{SU}(2) \otimes \text{U}(1) & \\ & \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow & \\ \text{forte} & \text{debole} & \text{elettromagnetica} \end{array}$$

# Il contenuto in particelle del Modello Standard



Q: La conservazione dell'energia è legata ad una simmetria?

A: Sì, la simmetria per traslazioni temporali.

Per la precisione, la simmetria per traslazioni spaziotemporali implica la conservazione del *quadriimpulso*, ovvero di energia e quantità di moto relativistiche.

Q: Tutti i bosoni di gauge hanno massa nulla?

A: No, i mediatori dell'interazione debole,  $W$  e  $Z$ , hanno massa. Come? Lo vediamo domani...

Q: Perché il bosone di Higgs non può decadere *direttamente* in 4 muoni?

A: Per farlo, ci vorrebbe un termine nella lagrangiana del tipo  $H\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$ . Un termine del genere non è proibito, ma la teoria risultante sarebbe *non rinormalizzabile*, che vuol dire che non può essere una teoria completa, ma solo una teoria *effettiva*. Il decadimento  $\beta$  era stato descritto da Fermi in modo simile, e poi si è scoperto che c'era di mezzo l'interazione debole, con un bosone ( $W$ ) intermedio.