



Meccanica Quantistica

Danilo Babusci
danilo.babusci@Inf.infn.it

Incontri di Fisica Moderna 2016

Introduzione

Convinzione comune tra i fisici di fine '800 è che con la dimostrazione dell'esistenza delle onde elettromagnetiche da parte di **Hertz (1888)** la comprensione della natura fosse completa:

- ✓ meccanica dei corpi (**Newton**)
- ✓ elettromagnetismo (**Maxwell**)

... basta soltanto *misurare meglio alcune quantità* e spiegare alcuni *fenomeni di minore importanza*:

- **effetto fotoelettrico** (capacità della luce UV di indurre corrente in un conduttore)
- **assorbimento/emissione nei gas** (spettri con righe)
- **radiazione di corpo nero**

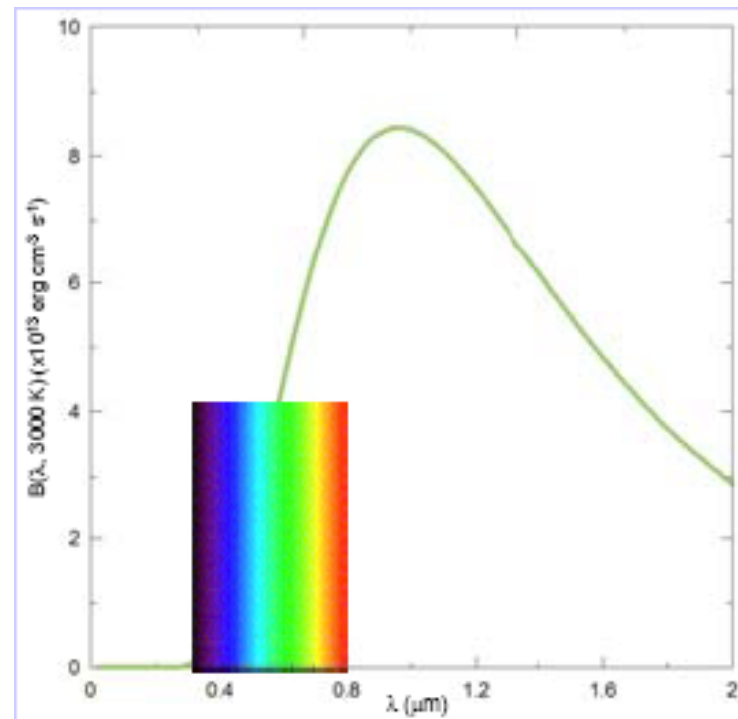
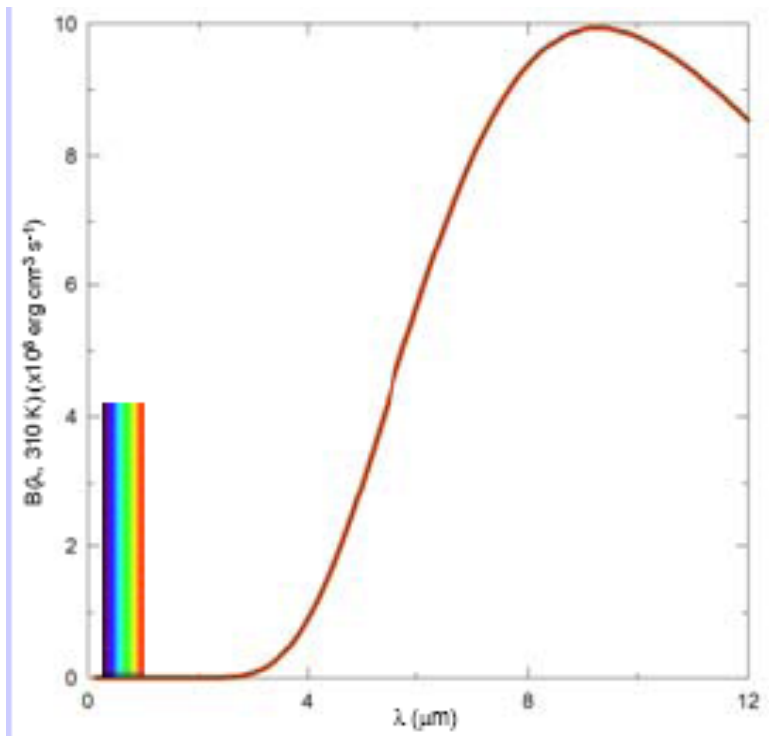
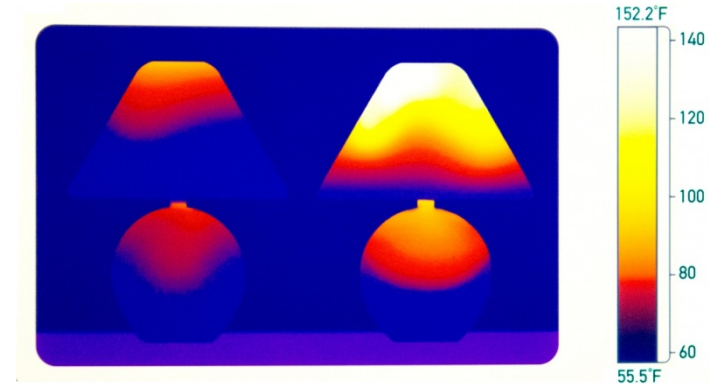
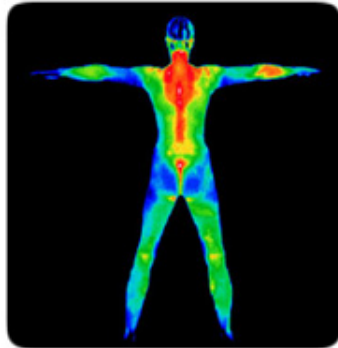
... è lo studio di questi fenomeni “minori” che scatena la crisi della fisica “classica” → **meccanica quantistica**

Emissione di Radiazione

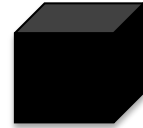
- ogni corpo a temperatura T (non in equilibrio termico con l'ambiente circostante) emette energia sotto forma di radiazione e.m. (**calore**)
 - oscillazione delle cariche elettriche contenute nel corpo (**Maxwell**)
- correlazione temperatura-colore (**Herschel – 1800**):
più alta T più la luce è spostata verso il blu (piccole lunghezze d'onda λ = alte frequenze ν)
 - spettro della luce solare
- ogni oggetto emette radiazione su tutte le lunghezze d'onda λ ma con una distribuzione di energia in funzione di λ che dipende dalla temperatura



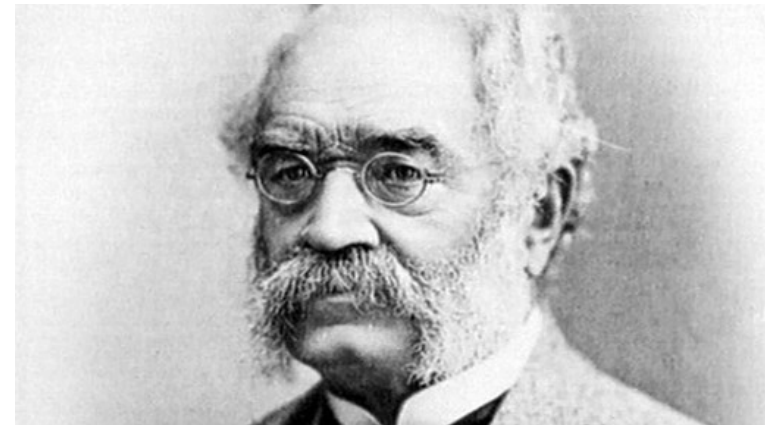
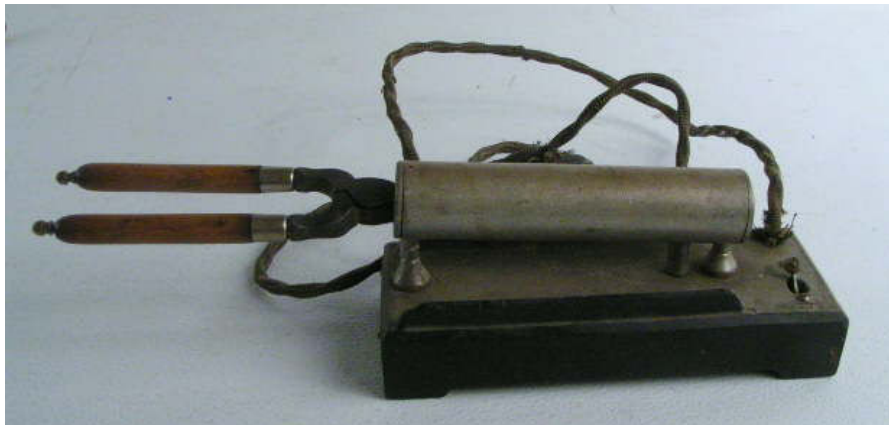
Emissione di Radiazione



Corpo nero



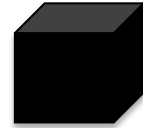
comprensione dei corpi incandescenti ha enorme impatto nelle produzioni industriali di stufe, piastre elettriche, lampade ... → necessario uno standard di misurazione dell'intensità luminosa



E. W. von Siemens

Idea: misura della temperatura degli oggetti dall'analisi della radiazione emessa → necessario modello di riferimento, i.e., oggetto che fornisce una radiazione che dipende soltanto dalla sua temperatura e non dalla sua forma e composizione chimica → **corpo nero**

Corpo nero



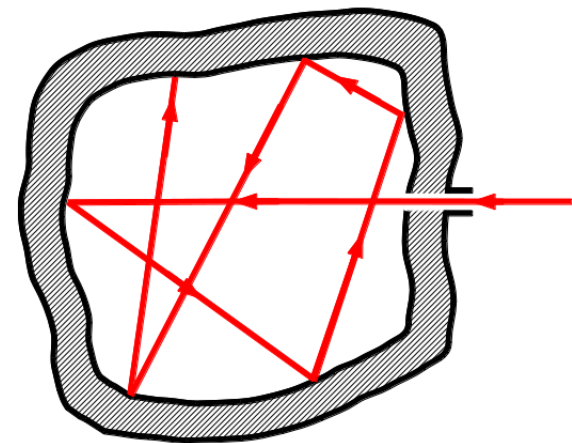
corpo nero = un qualunque oggetto che assorbe tutta la radiazione che incide su di esso (senza trasmetterne/rifletterne alcuna) e di emettere la stessa radiazione che assorbe

equilibrio termico: emissività e = assorbimento $a \rightarrow$ **corpo nero**: $e = a = 1$

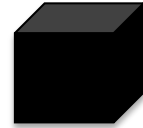
NB – concetto ideale: in natura sono possibili solo approssimazioni più o meno buone, i.e. $a < 1$

corpo nero di **Kirchhoff**: cavità mantenuta a temperatura costante, su cui è praticato piccolo foro

radiazione entrante viene assorbita e riemessa un grandissimo numero di volte prima di uscire



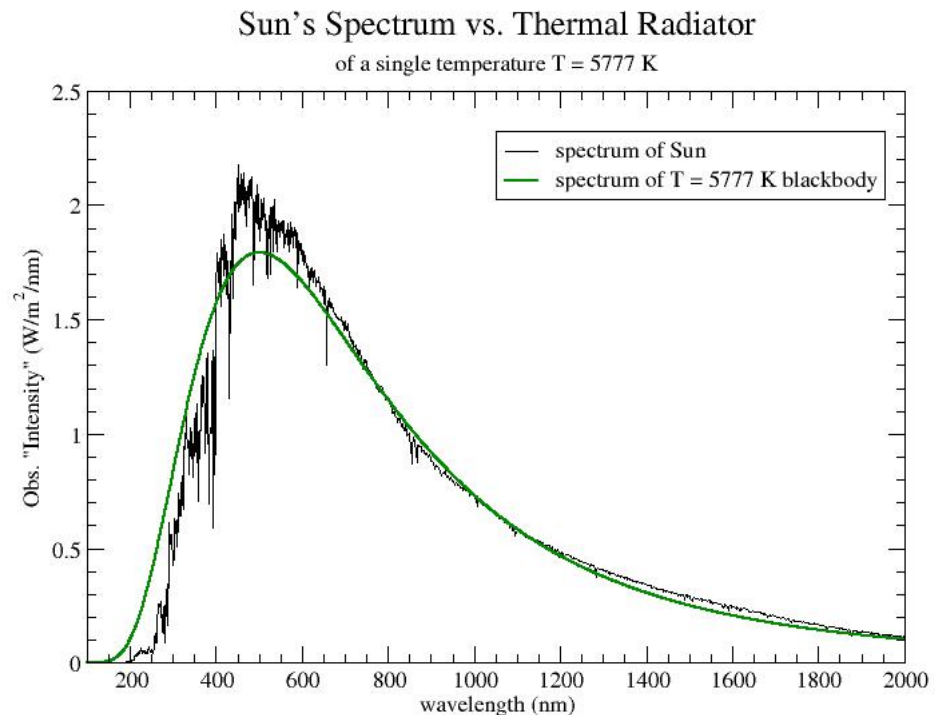
Corpo nero



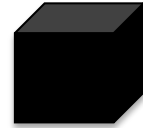
bilancio energetico + principio dell'equilibrio dettagliato* $\rightarrow$ intensità per unità di lunghezza d'onda della radiazione all'interno della cavità dipende solo dalla temperatura T e non da forma e natura delle pareti

* all'equilibrio, energia emessa = energia assorbita $\forall \lambda$

Sperimentalmente: forma dello spettro di un corpo nero dipende solo dalla sua temperatura $T \rightarrow$ tutti i corpi incandescenti, a una data T , emettono radiazione termica con una distribuzione in lunghezza d'onda λ che è ben approssimata da quella di un corpo nero ideale



Corpo nero



Problema: interpretazione dei dati in termini della fisica del tempo
(termodinamica + elettromagnetismo)

✓ Wien

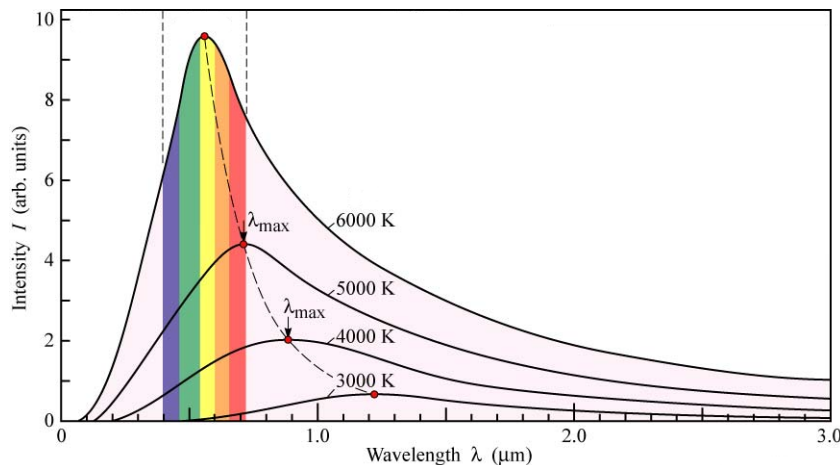
- potere emissivo*

$$\Psi_{\lambda} = \frac{1}{\lambda^5} F(\lambda T)$$

*potenza per unità di superficie emessa in $d\lambda$

- legge di spostamento

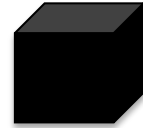
$$\lambda_{\max} T = \text{costante}$$



sperimentalmente:

$$\text{costante} = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Corpo nero



✓ Stefan & Boltzmann

potenza emessa per unità di superficie (i.e., $\int_0^\infty d\lambda \Psi_\lambda$)

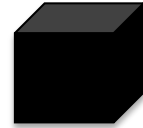
$$\Psi_{\text{tot}} = \sigma T^4$$

teoria (Boltzmann): $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$



rimane da determinare un quadro teorico in grado di predire la forma dello spettro, i.e., la forma della funzione $F(\lambda T)$

Spettro del Corpo nero



Forma di $F(\lambda T)$?

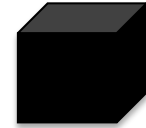
- Wien

somiglianza tra lo spettro di corpo nero e la distribuzione di velocità di Maxwell → emissione di radiazione legata (in che modo?) con l'agitazione termica → legge di radiazione:

$$F(\lambda T) = C e^{-C'/(\lambda T)}$$

- NB – no solido fondamento teorico;
- potere emissivo è ben riprodotto per λ piccola ma sottostimato per λ grande;
 - C e C' determinate soltanto per via sperimentale;

Spettro del Corpo nero



- Rayleigh & Jeans

assorbimento/emissione in cavità solo tramite onde e.m. stazionarie;
associazione onda stazionaria – oscillatore armonico → energia in
intervallo infinitesimo di λ :

$$\frac{dE}{d\lambda} = N(\lambda) \langle \epsilon_\lambda \rangle$$

energia media della
oscillazione con
lunghezza d'onda λ

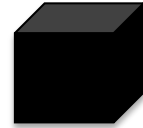
n. di modi di oscillazione di
lunghezza d'onda tra λ e $\lambda + d\lambda$

$N(\lambda)$

caso 1-D: condizione di stazionarietà su segmento lungo L

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Spettro del Corpo nero



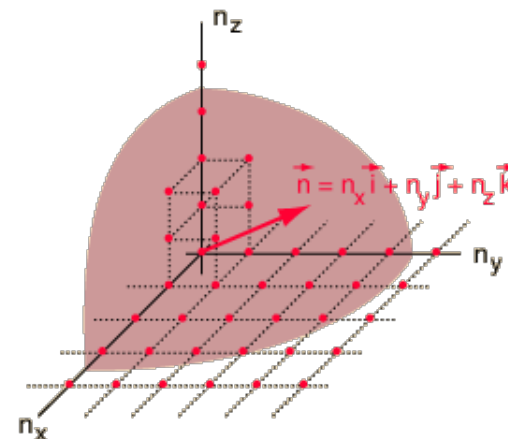
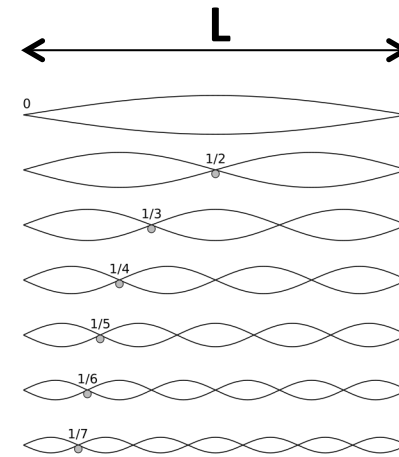
→ $n = \frac{2L}{\lambda}$

n. dei modi in intervallo infinitesimo $d\lambda$
(a meno del segno)

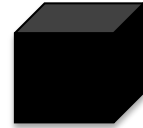
$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{2L}{\lambda^2}$$

caso 3-D: cubo di spigolo L

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{2L}{\lambda}$$



Spettro del Corpo nero



volume spazio dei modi: sfera di raggio n $V_n = \frac{4\pi}{3} n^3 = \frac{32\pi}{3} \frac{L^3}{\lambda^3}$

- radiazione e.m. $\rightarrow$ 2 stati di polarizzazione

- $n_x, n_y, n_z > 0 \rightarrow$ un solo ottante

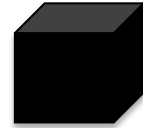
$$\longrightarrow \bar{V}_n = \frac{2V_n}{8} = \frac{8\pi}{3} \frac{L^3}{\lambda^3}$$

n. dei modi in intervallo infinitesimo $d\lambda$ (a meno del segno)

$$N(\lambda) = \frac{d\bar{V}_n}{d\lambda} = 8\pi \frac{L^3}{\lambda^4}$$

NB - per unità di volume: $n_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}$

Spettro del Corpo nero



$$\langle \epsilon_\lambda \rangle$$

1. teorema di **equipartizione** dell'energia: all'equilibrio, alla temperatura T , energia cinetica media di un oscillatore = $\frac{1}{2} k_B T$
2. teorema del **viriale**: $\langle E_{\text{kin.}} \rangle = \langle E_{\text{pot.}} \rangle$

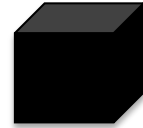


$$\langle \epsilon_\lambda \rangle = k_B T$$

Per cui:

$$\rho(\lambda, T) = \frac{1}{L^3} \frac{dE}{d\lambda} = n_\lambda \langle \epsilon_\lambda \rangle = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T$$

Spettro del Corpo nero



NB - Metodo alternativo per ricavare l'energia media dell'oscillatore

Meccanica Statistica (**Gibbs**): in un sistema in equilibrio termico a temperatura T , contenente un numero molto grande di **elementi uguali**, la probabilità di trovare un elemento con energia E è proporzionale a

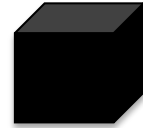
$$\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

Normalizzazione della probabilità: $\int_0^\infty dE P(E) = 1$

$$\longrightarrow \int_0^\infty dE N e^{-E/(k_B T)} = 1 \quad \longrightarrow \quad N = \frac{1}{k_B T}$$

$$\text{i.e.} \quad P(E) = \frac{1}{k_B T} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

Spettro del Corpo nero



energia media di un oscillatore:

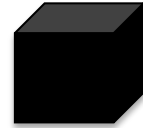
$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty dE E P(E)}{\int_0^\infty dE P(E)} = \int_0^\infty dE \frac{E}{k_B T} e^{-E/(k_B T)}$$

$$\langle E \rangle = k_B T \int_0^\infty dx x e^{-x} = -k_B T \int_0^\infty (d e^{-x}) x$$

$$= -k_B T \left\{ x e^{-x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dx e^{-x} \right\}$$

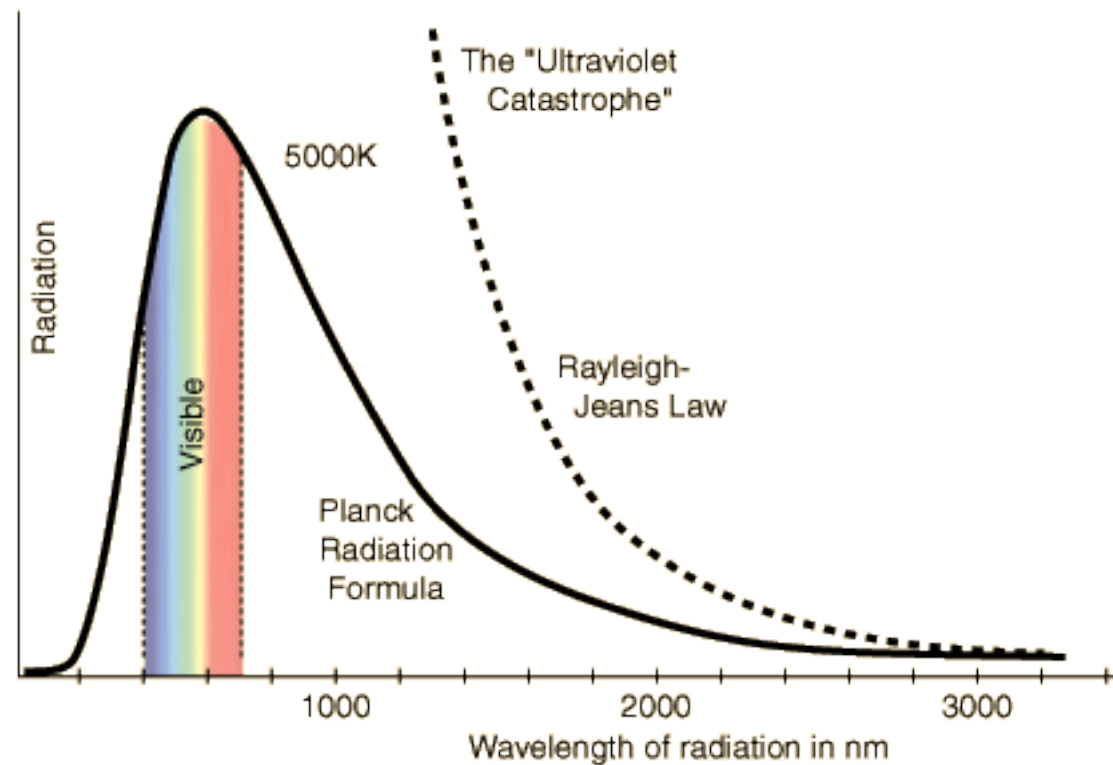
i.e. $\langle E \rangle = k_B T$

Spettro del Corpo nero

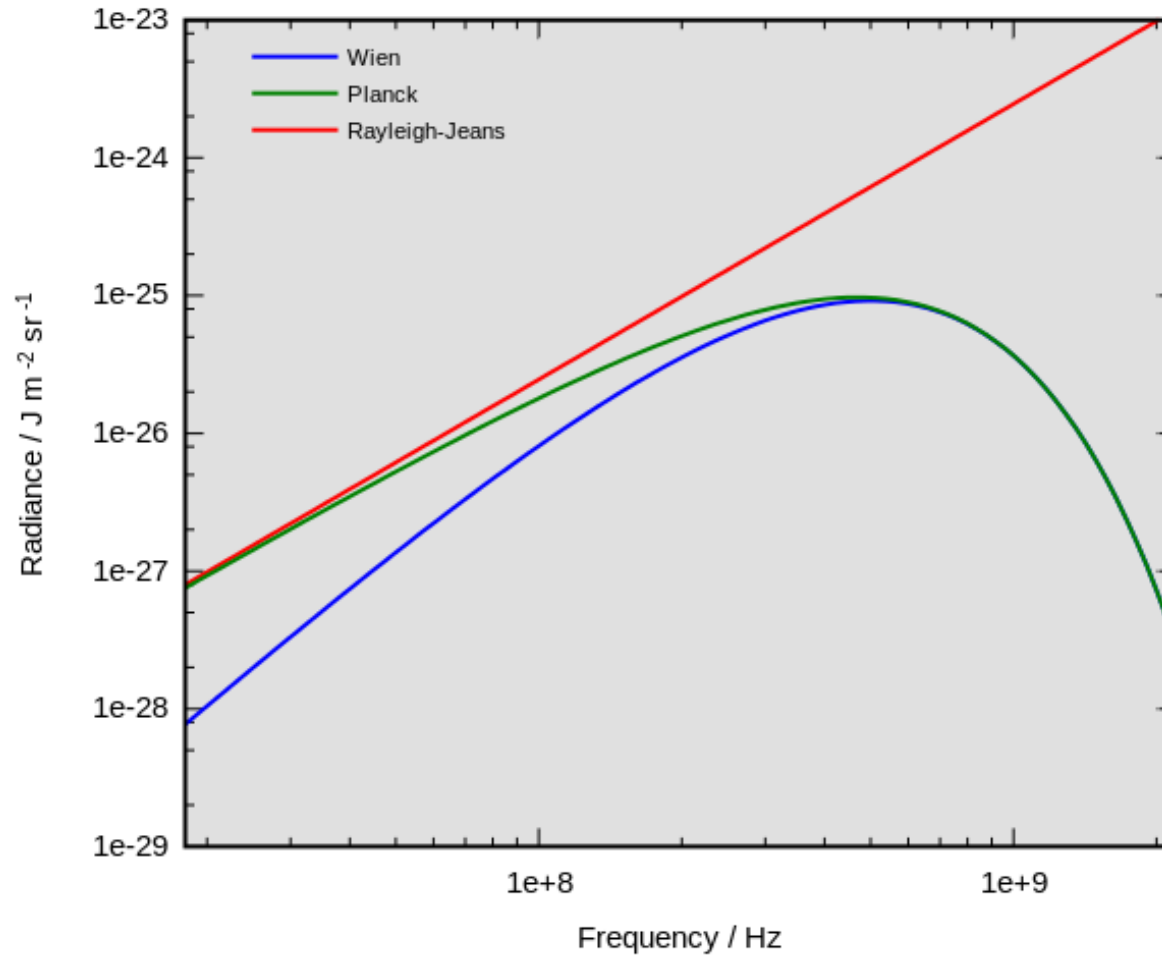
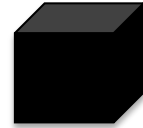


Sebbene teoricamente fondata, la formula Rayleigh-Jeans:

- è in accordo con i dati sperimentali solo per elevati valori di λ
- diverge nel limite valori $\lambda \rightarrow 0$ (catastrofe ultravioletta)



Spettro del Corpo nero



NB – la curva verde è la distribuzione di **Planck** (vedi avanti), perfettamente in accordo con l'osservazione sperimentale

Planck

catastrofe ultravioletta può essere evitata “spegnendo” i modi di piccola lunghezza d’onda (alta frequenza) → i modi di vibrazione degli oscillatori non sono tutti ugualmente possibili.

Fisica Classica non fornisce alcun modo teoricamente fondato per realizzare questo “filtro” ad alta frequenza.

Planck: ogni oscillatore può scambiare energia in multipli interi di un “quanto” fondamentale, la cui taglia è

$$E = h\nu$$

costante di Planck

NB - $h = 6.62606957 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Planck

Perché questa idea funziona?

oscillatore di frequenza ν può scambiare energia con la radiazione di stessa frequenza soltanto in “pacchetti” di taglia

$$h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots, nh\nu, \dots$$

→ a frequenza elevata gli scambi energetici sono consistenti → impossibile in un corpo all'equilibrio: comporterebbe squilibrio energetico troppo forte

il corpo nero è come il nostro portafoglio: tutti gradiremmo che fosse (almeno) in equilibrio; se associamo i diversi tagli di banconote a oscillatori di frequenza diversa, è chiaro che lo scambio di banconote da 5 e 10 € è molto più comune, e meno destabilizzante, di quello di banconote da 500 €

Planck

NB – per **Planck** la quantizzazione valeva solo per la materia che emette e assorbe radiazione (i.e., le cariche elettriche oscillanti della parete della cavità), non per la radiazione stessa; pensava che la radiazione fosse come il burro, che può essere prodotto in quantità arbitrarie, ma viene comprato e venduto solo in multipli di 100 g. Fu **Einstein** che nel 1905 propose che l'energia della radiazione di frequenza ν fosse essa stessa un multiplo intero di $h\nu$, e usò tale idea per spiegare perché nell'effetto fotoelettrico nessun elettrone viene emesso se ν non supera un valore di soglia (**vedi avanti**).

Con l'ipotesi della quantizzazione, l'energia media di un oscillatore diviene (**cfr. slide 16**):

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-E_n/(k_B T)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/(k_B T)}} \quad E_n = n h \nu$$

Planck

Posto:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$\longrightarrow \langle E \rangle = \frac{1}{Z} \left(-\frac{dZ}{d\beta} \right) = -\frac{d}{d\beta} \ln Z$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n h \nu} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h \nu})^n \quad \longrightarrow \quad Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta h \nu}}$$

$$\longrightarrow \langle E \rangle = \frac{h \nu}{e^{h \nu / (k_B T)} - 1}$$

NB – a differenza del caso classico, l'energia media dipende anche da ν , ed è proprio questa dipendenza che cancella la divergenza in $n_\lambda \rightarrow$ **la catastrofe ultravioletta scompare**

Planck

Quindi:

$$\rho(\lambda, T) = n_\lambda \langle E \rangle = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hc/(k_B \lambda T)} - 1}$$

Limiti notevoli:

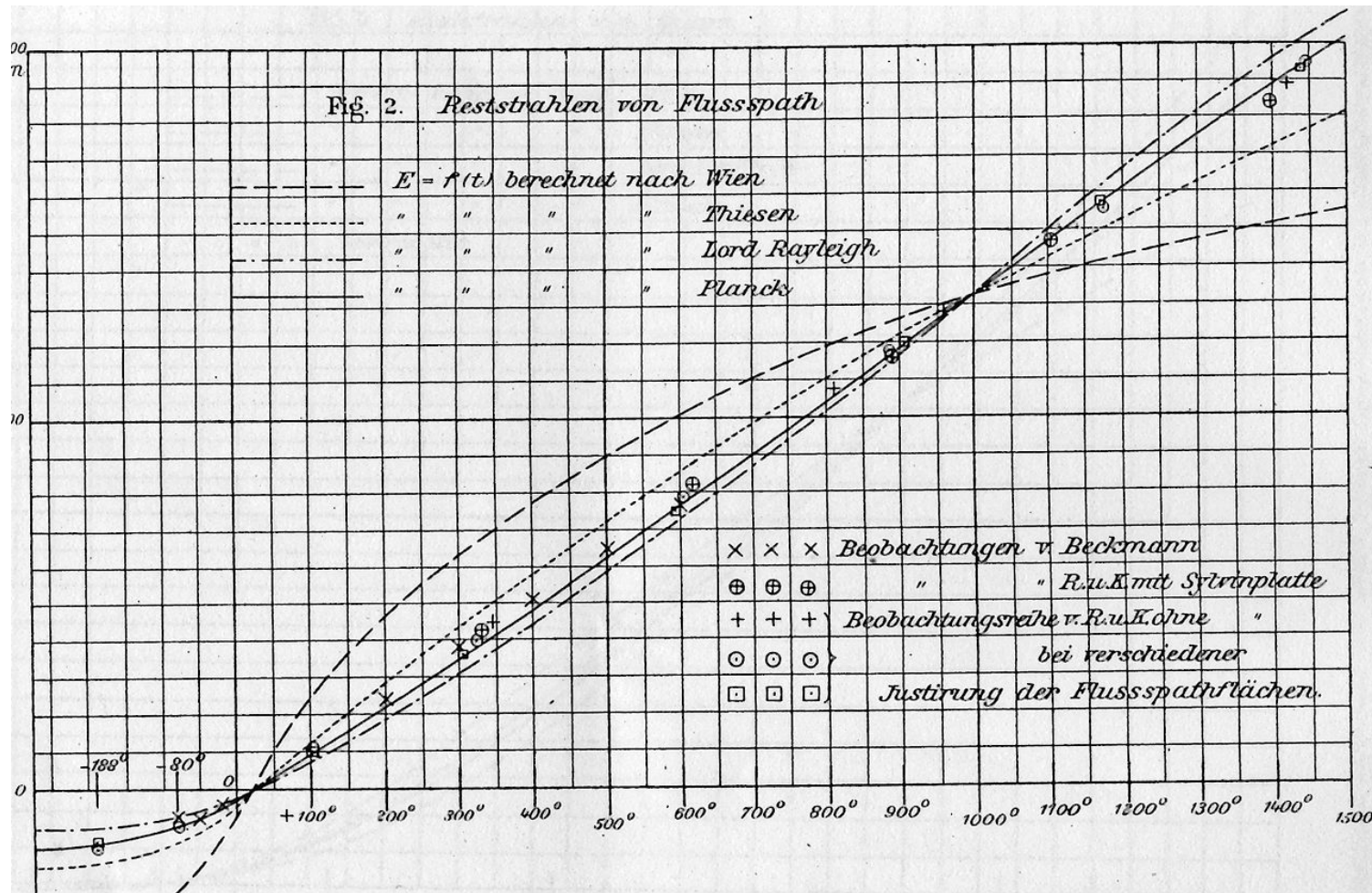
$$\text{➤ } \lambda \rightarrow 0 \quad \rho(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hc/(k_B \lambda T)}} = C e^{-C'/(\lambda T)}$$

Wien

$$\text{➤ } \lambda \rightarrow \infty \quad \rho(\lambda, T) \approx \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{hc/(k_B \lambda T)} = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T$$

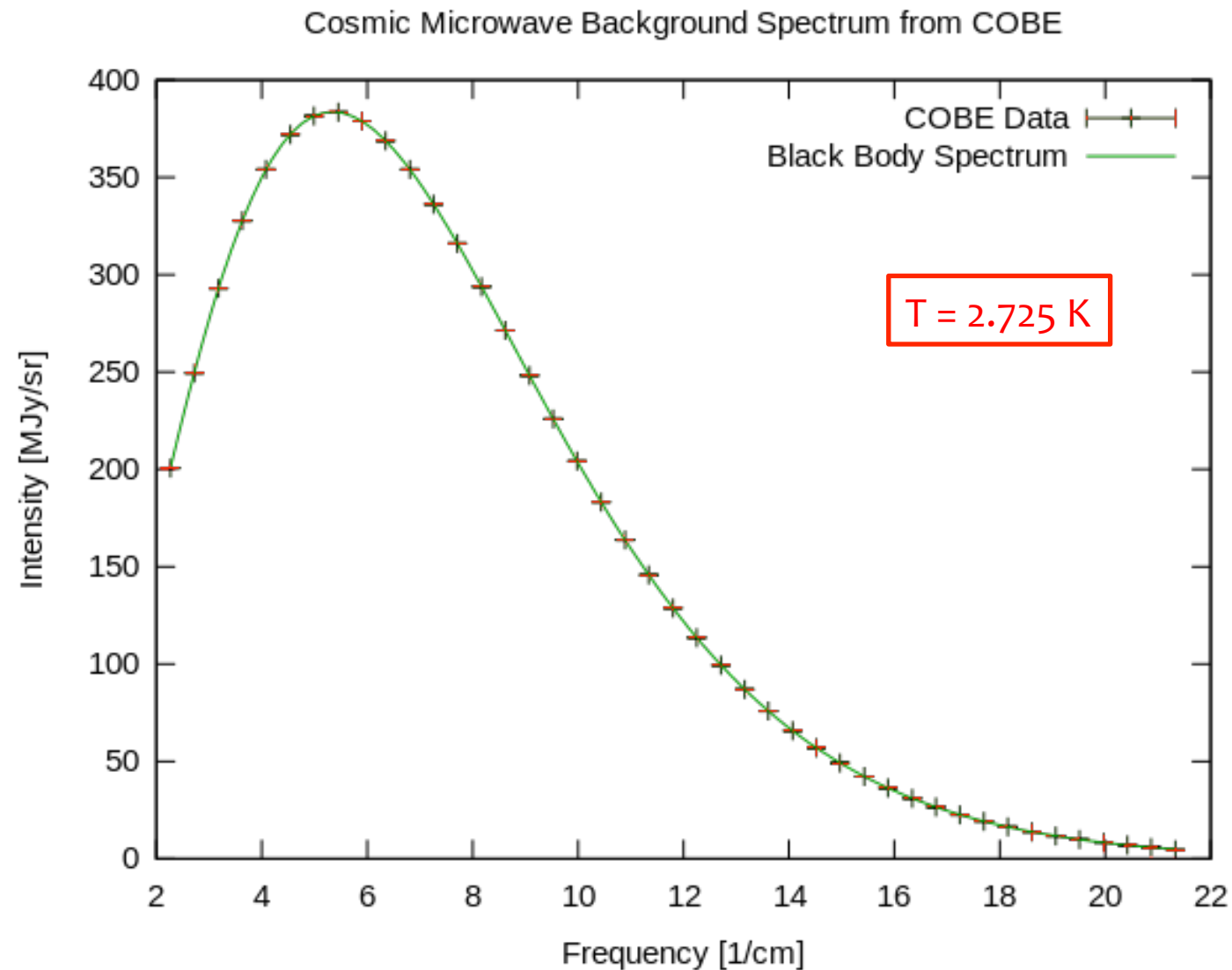
Rayleigh
Jeans

Planck



Misure sperimentali di Ruben & Kayser

Radiazione Cosmica di Fondo



Meccanica Quantistica

Per molti anni ho provato a salvare la Fisica dai livelli energetici discontinui ...

[Max Planck]

- non c'è modo di spiegare lo spettro di corpo nero su base puramente classica;
- non tutte le quantità di energia possono essere scambiate ...
(livelli di energia discreti, ovvero quantizzati);
- nascita della **teoria quantistica** → molti dei comportamenti inspiegabili in chiave classica risultano evidenti alla luce della quantizzazione

Circa un anno fa, mentre Philip Candelas ed io stavamo aspettando un ascensore, la nostra conversazione si spostò su un giovane teorico che era stato piuttosto promettente come studente laureato e che avevo poi perso di vista. Chiesi a Phil cosa avesse interferito con la ricerca di questo ex-studente. Phil scosse tristemente la testa e disse: "Ha cercato di capire la meccanica quantistica".

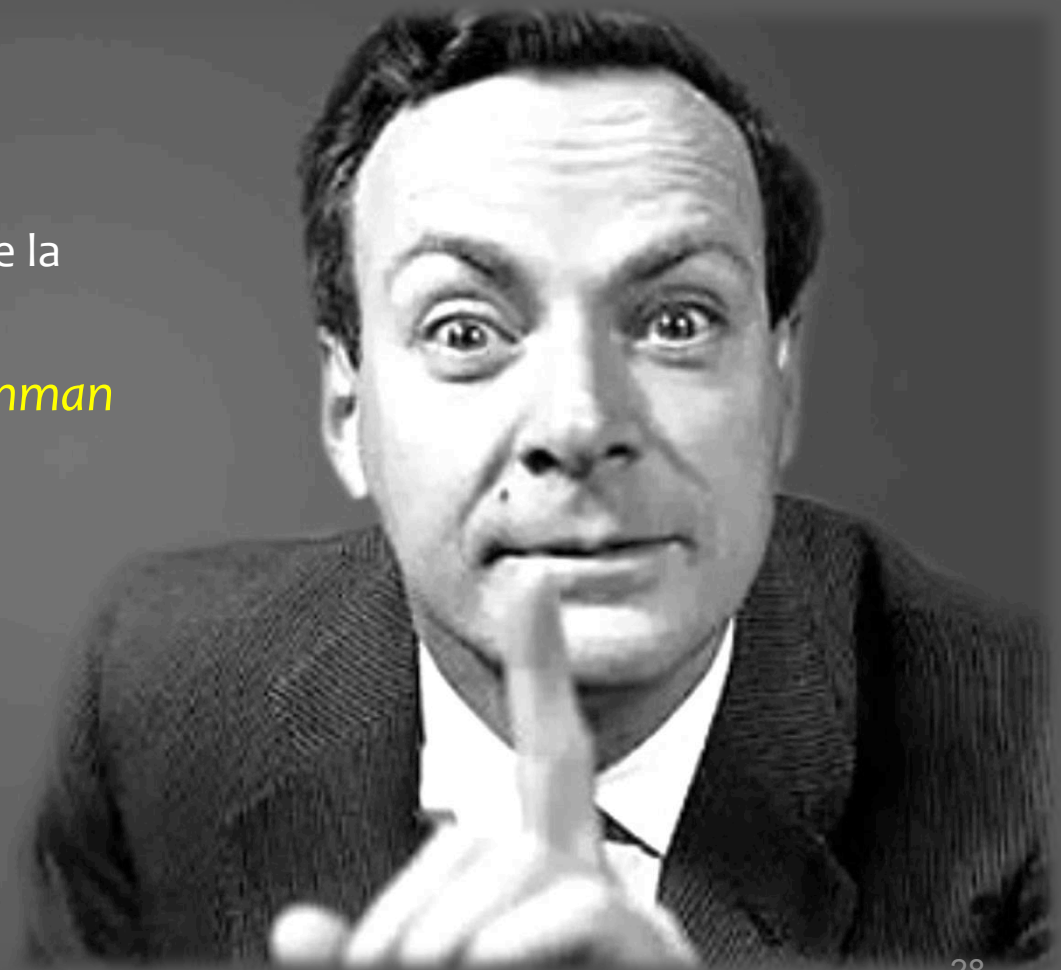
S. Weinberg

non c'è da preoccuparsi ...

(... siamo in buona compagnia)

Penso di poter tranquillamente
affermare che nessuno comprende la
meccanica quantistica

R. P. Feynman



Però la meccanica quantistica è la teoria fisica di maggior successo mai sviluppata dall'umanità ...

Esempio: momento magnetico anomalo del muone

Esp.	$a_\mu = 1.16592080(63) \times 10^{-3}$
Teo.	$a_\mu = 1.16591786(66) \times 10^{-3}$

$$|\delta a_\mu| = (294 \pm 89) \times 10^{-11} \quad !!$$

... e alla base della nostra comprensione della materia (dai quarks agli elementi chimici); dell'evoluzione stellare, delle reazioni chimiche, del laser, del transistor, dei superconduttori ...

L'esperimento delle due fenditure

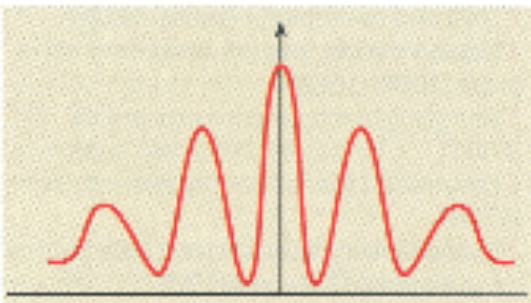
COMMENT: CRITICAL POINT

The most beautiful experiment

The most beautiful experiment in physics, according to a poll of *Physics World* readers, is the interference of single electrons in a Young's double slit. **Robert P Crease** reports

When I asked readers earlier this year to submit candidates for the "most beautiful experiment in physics" (*Physics World* May p17), I was pleased to receive more than 200 replies. The responses covered a broad spectrum, ranging from actual experiments to thought experiments, and from proposed experiments to proofs, theorems and models. However, one experiment – the double-slit experiment with electrons – was cited more often than any other, receiving a total of 20 votes.

Others in the top 10 included Galileo's experiments with falling bodies, Millikan's

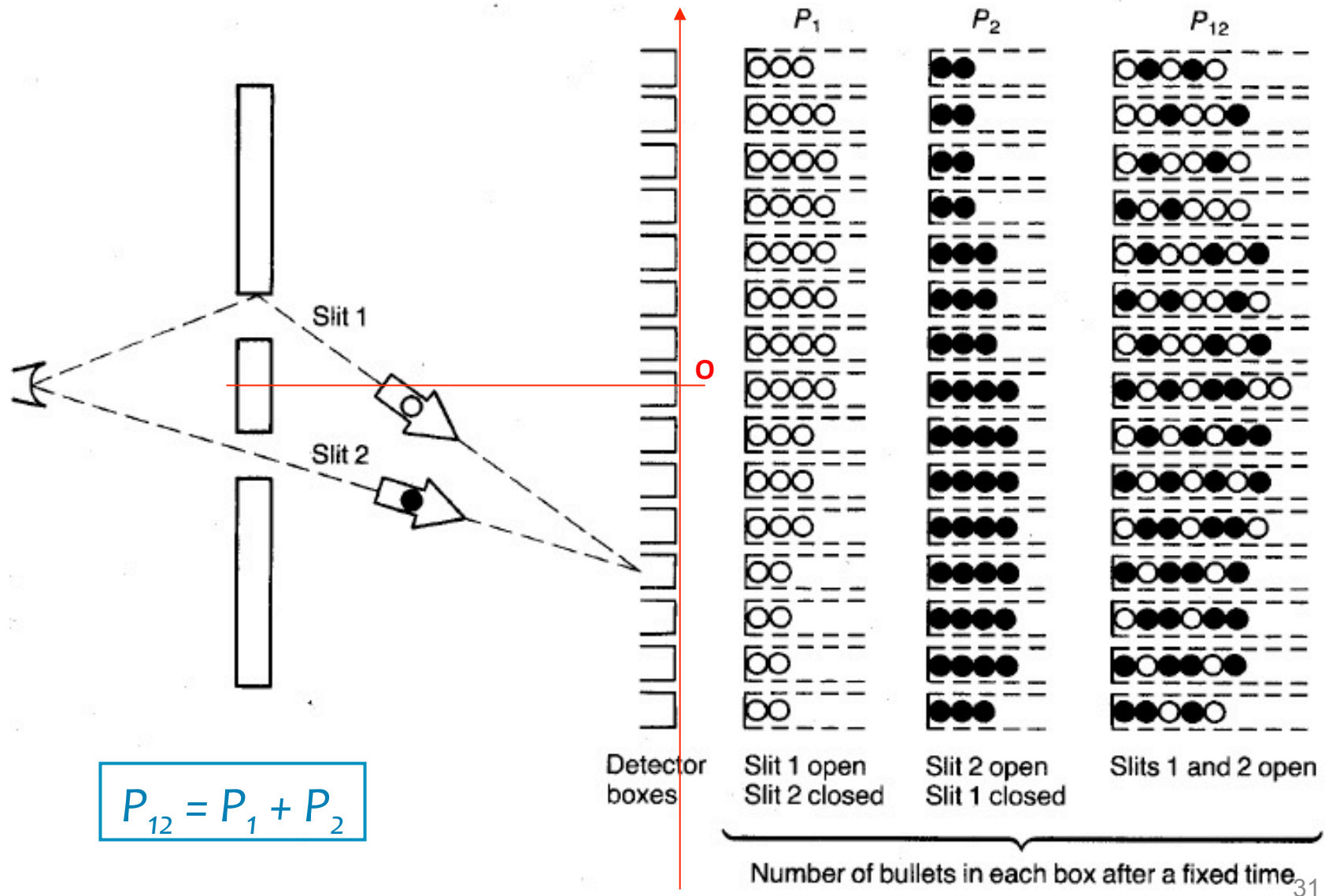


Simply beautiful – the spatial intensity distribution of electrons that have interfered in a Young's double-slit experiment.

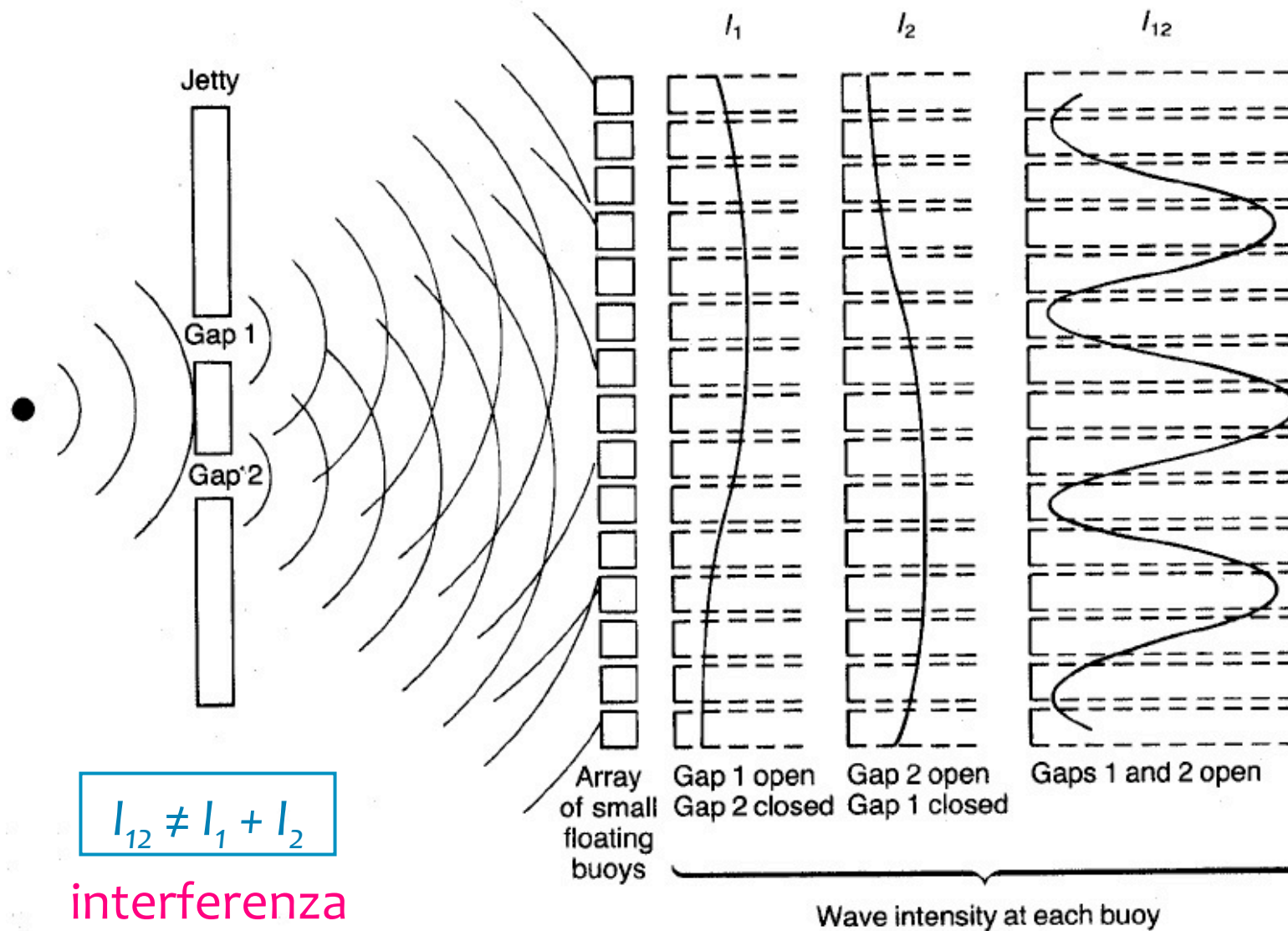
out. Economy might refer to either the nature from a detached distance. Readers found beauty in small-scale play with simple things like balls, waves, sounds and coins – allowing order in apparently random and contradictory events to show itself. Other readers found beauty in much larger play – such as Roemer's observations of Jupiter's moon Io to determine the speed of light or Eddington's measurement of the bending of starlight. These astronomical observations turn the entire solar system – and even the galaxy and beyond – into a vast playing field for experiment.

Thomas Young (1802) dimostra definitivamente la natura ondulatoria della luce

2 fenditure: proiettili

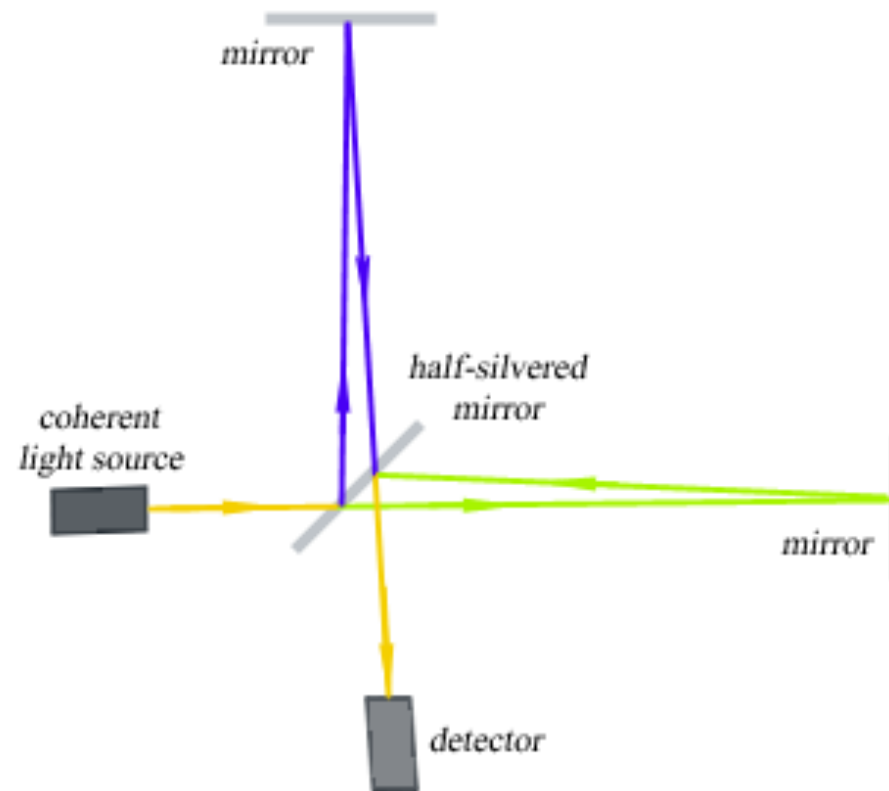


2 fenditure: onde d'acqua



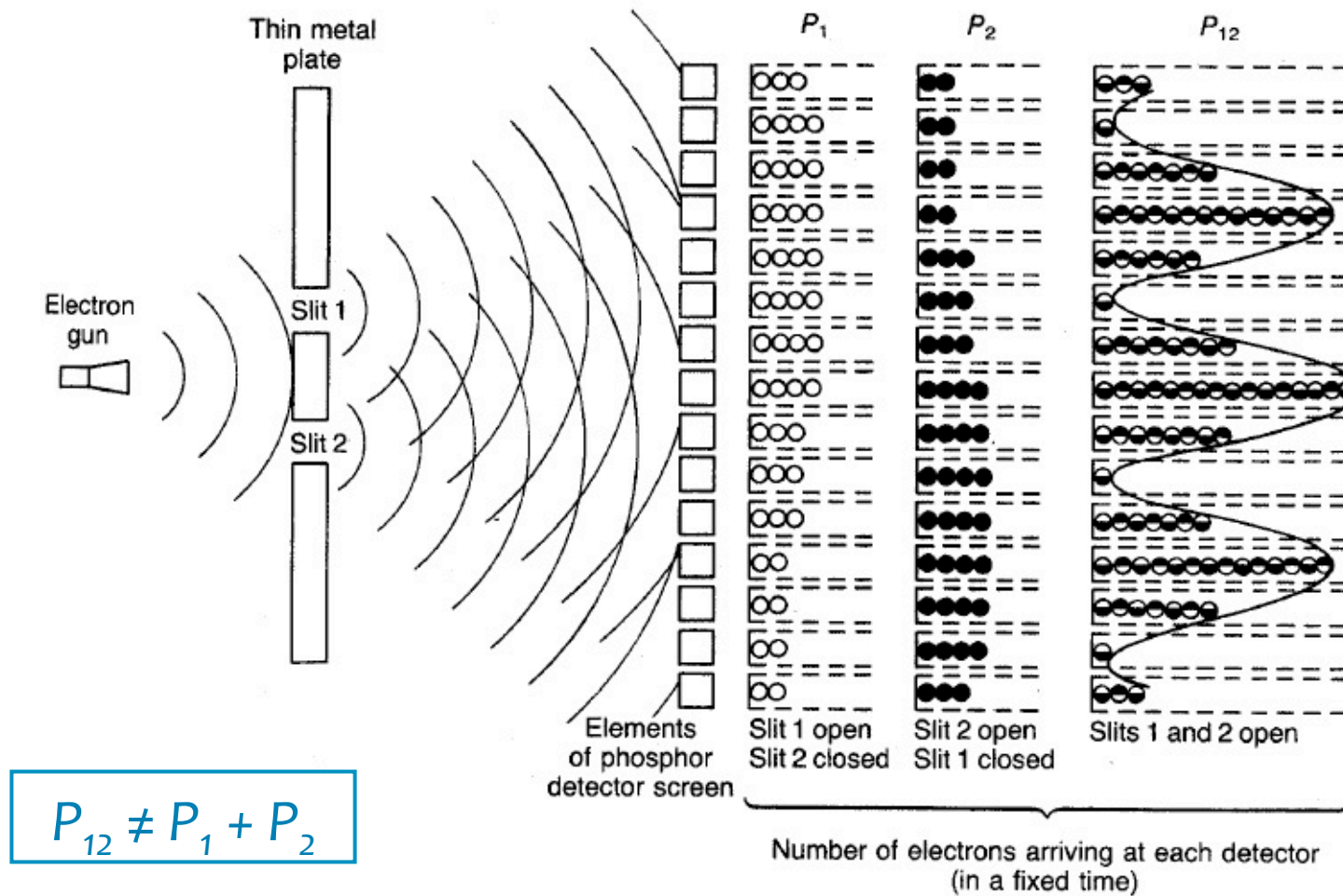
2 fenditure: luce

... anche la luce si comporta come un'onda



interferometro di [Michelson](#)

2 fenditure: elettroni



... anche per gli elettroni si ha interferenza (!?)

2 fenditure: elettroni

come spiegare questo risultato?

- 1) teoria “della divisione”: elettroni si dividono a metà e ciascuna di queste attraversa un foro diverso (come è nel caso delle onde)

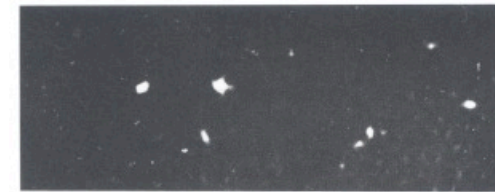
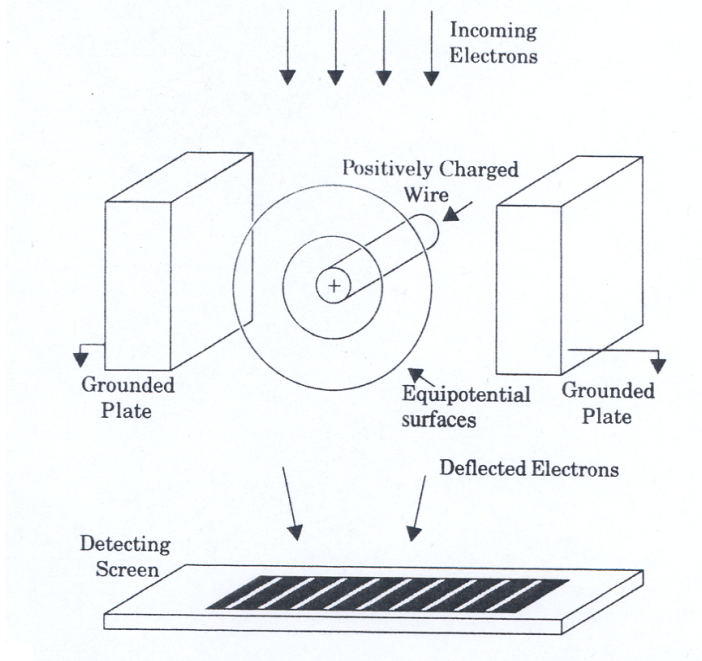
NO: gli elettroni arrivano interi sullo schermo
(lo si vede inviando un elettrone alla volta)

- 2) teoria “dell’ingorgo”: moltissimi elettroni in gioco → elettroni che attraversano una fenditura collidono con quelli che attraversano l’altra

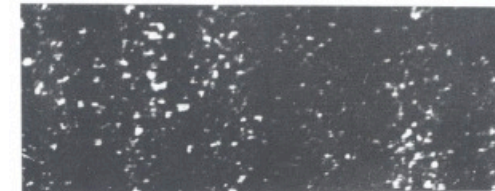
NO: la figura d’interferenza permane anche con un solo elettrone nell’apparato

2 fenditure: elettroni

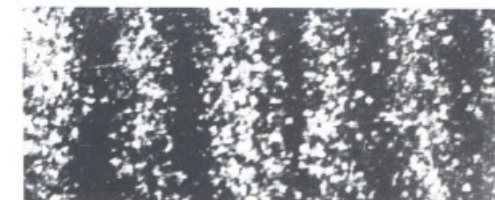
A. Tonomura et al. American Journal of Physics **57**, 117 (1989)



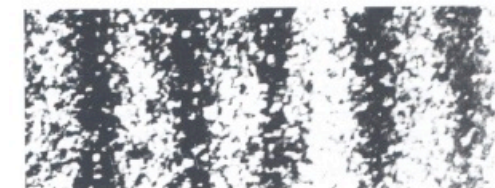
0.02 s



10 s



60 s



120 s

... ogni elettrone parte dal cannone e arriva al rivelatore come particella, ma percorre lo spazio tra questi come un'onda, attraversando quindi **entrambe le fenditure!**

2 fenditure: neutroni

Zeilinger et al., *Rev. Mod. Phys.* **60**, 1067 (1988)

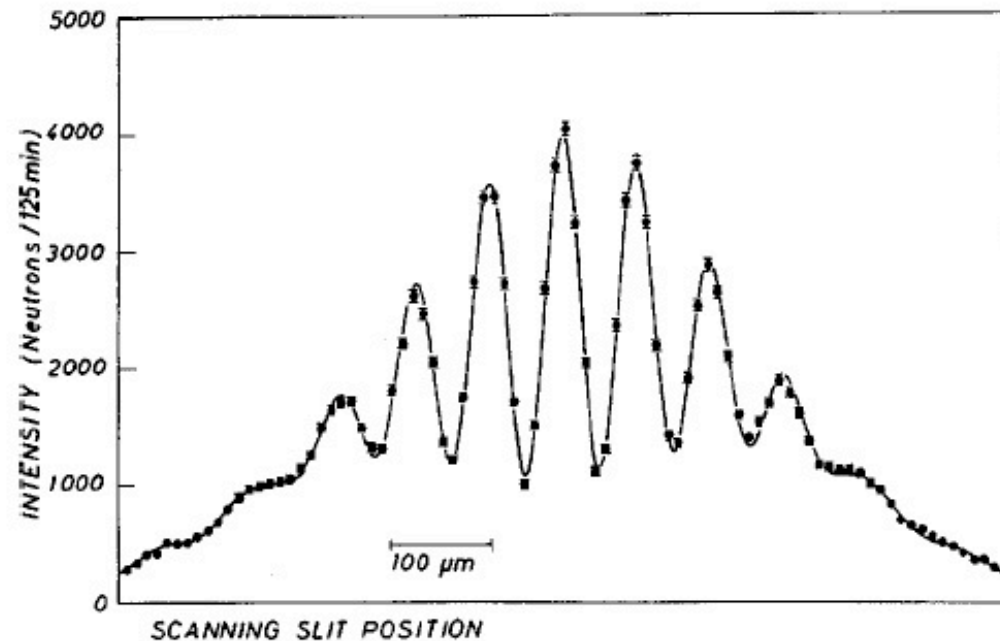


FIG. 1. A double-slit diffraction pattern measured with very cold neutrons with a wavelength of 2 nm corresponding to a velocity of 200 ms^{-1} . The two slits were 22 μm and 23 μm wide, respectively, separated by a distance of 104 μm . The resulting diffraction angles were only of the order of 10 μrad , hence the observation plane was located 5 m downstream from the double slit in order to resolve the interference pattern.

2 fenditure: atomi

(elio metastabile)

O. Carnal and J. Mlynek, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2689 (1991)

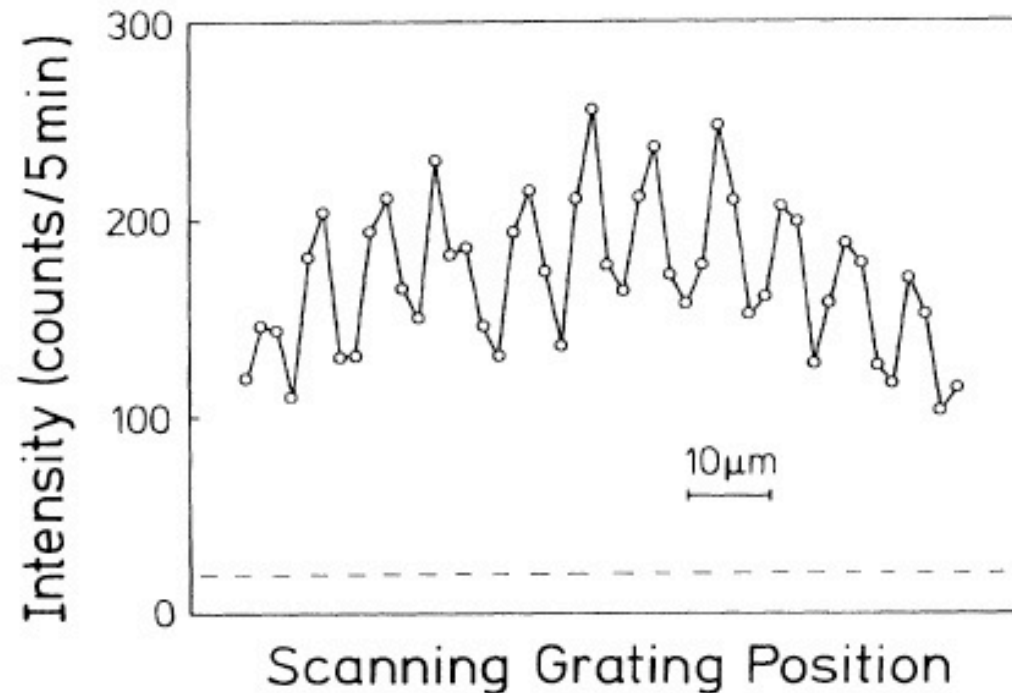


FIG. 5. Atomic density profile, monitored with the 8- μm grating in the detector plane, as a function of the lateral grating displacement. The dashed line is the detector background. The line connecting the experimental points is a guide to the eye.

2 fenditure: fullerene

L. Hackermüller et al., *Nature* **427**, 711 (2004)

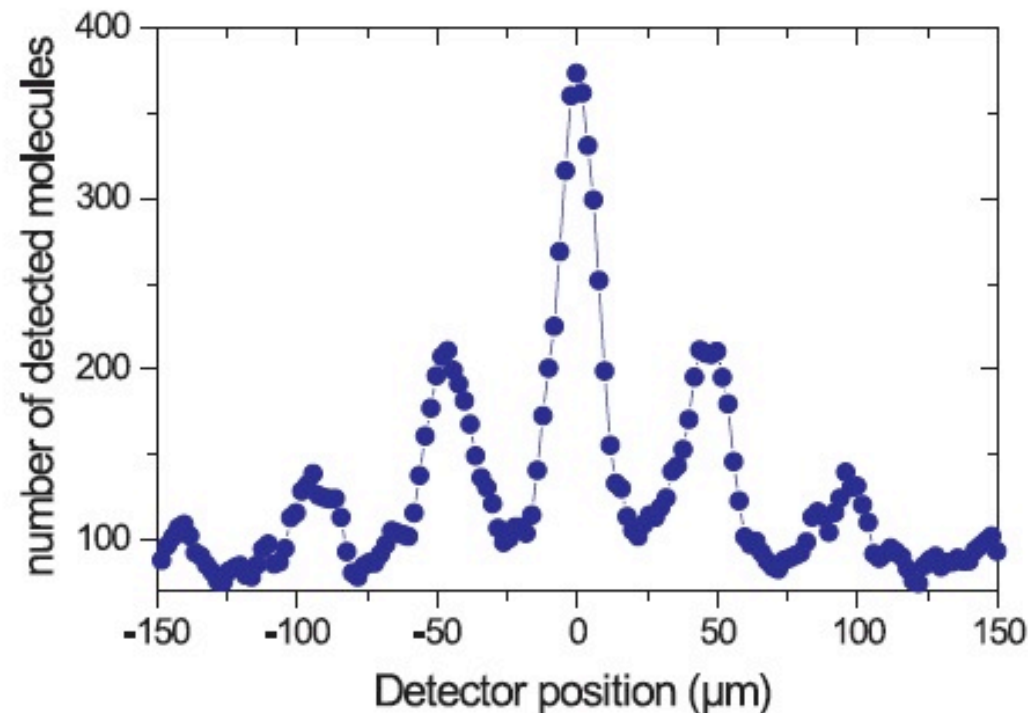
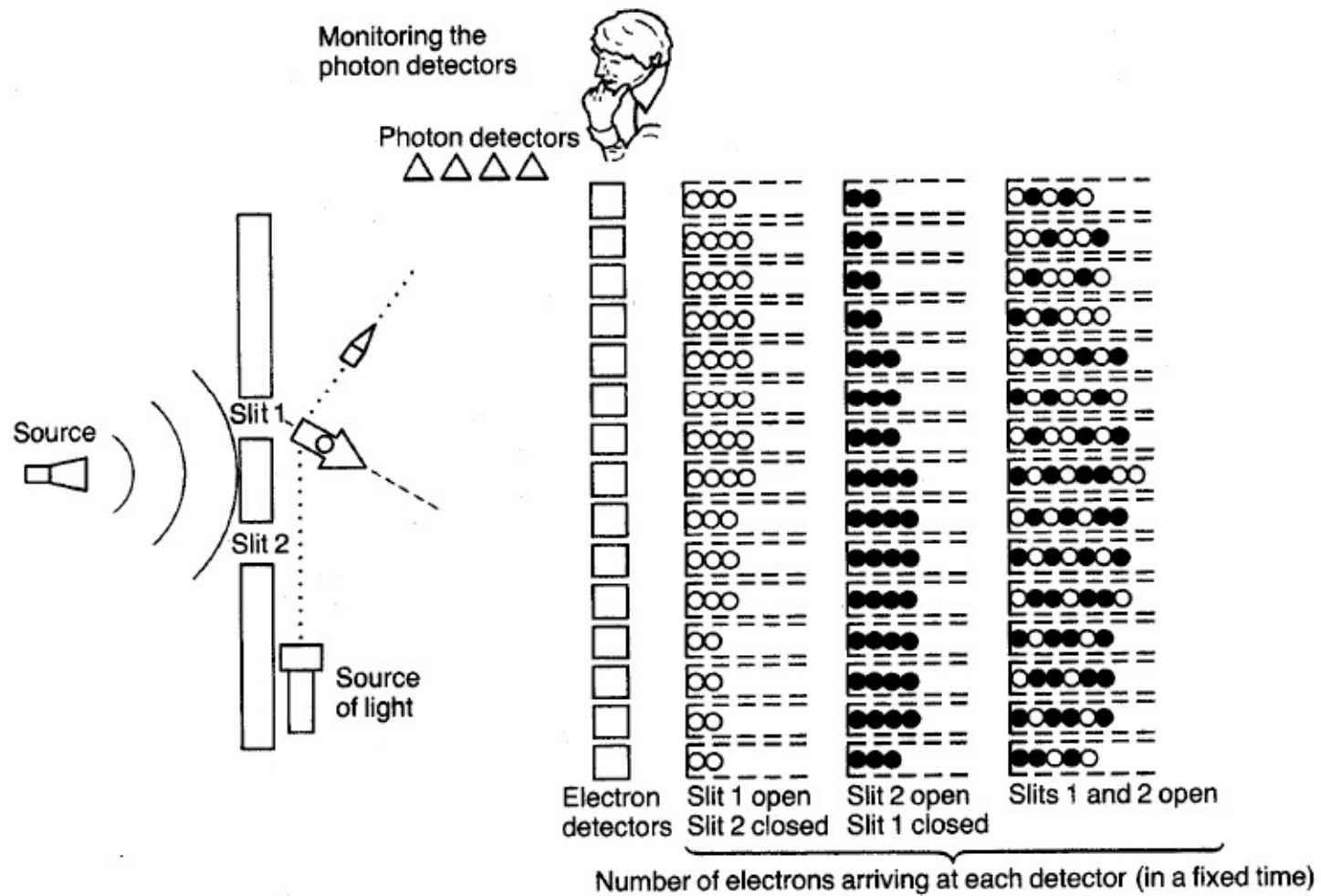


FIG. 2. Interference pattern of C-60 molecules behind a 100 nm grating, which proves the absence of thermal decoherence in the experiment [6], even for molecules with internal temperatures as high as 900 K (M. Arndt, O. Nairz, and A. Zeilinger, in preparation).

Osservando gli elettroni



Osservando gli elettroni

- Non si vedono mai 2 lampi (di intensità dimezzata) simultaneamente: il lampo proviene sempre o dalle vicinanze del foro 1 o di quello 2, **mai** da tutti e due insieme → elettroni passano per un solo foro
- Distribuzioni P'_1 e P'_2 della posizione d'arrivo sullo schermo di questi 2 gruppi di elettroni sono simili a quelle P_1 e P_2 ottenute con una sola fenditura aperta

... insomma, nulla di paradossale come passare attraverso entrambe le fenditure: **quando li osserviamo, gli elettroni si comportano come i proiettili:** $P'_{12} = P'_1 + P'_2$

Osservando gli elettroni

e se spegniamo la luce? otteniamo P_{12} , ovvero riappare la figura d'interferenza e, quindi, il problema è nella pretesa di capire quale cammino segue l'elettrone

Interpretare un comportamento di questo tipo richiede una nuova base concettuale per tutta la fisica



dualità onda-corpuscolo: i sistemi quantistici quando vengono rivelati, si comportano come **particelle**; quando si propagano indisturbati, come **onde**

Onde di materia

Elettroni come onde: de Broglie (1924)* → ogni particella si propaga “a cavallo” di un’onda “pilota” con

* 3 anni prima dell’osservazione sperimentale di Davisson & Germer e G. P. Thomson

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

→ costante di Planck

→ impulso particella (mv)

rappresentazione matematica della schizofrenia degli elettroni:
connette una caratteristica ondulatoria (λ) a una particellare (p); non
dice nulla sul “meccanismo”: com’è possibile che uno stesso oggetto
sia in un istante un’onda e in quello successivo una particella ?

Onde di materia

... ma se tutte le particelle sono onde, allora lo sono anch'io, i.e.
84 kg che si muovono a 5 km/h

costante di Planck: $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

$$\longrightarrow \lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{84 \times (5 \times 10^3 / 3600)} \simeq 5.7 \times 10^{-36} \text{ m}$$

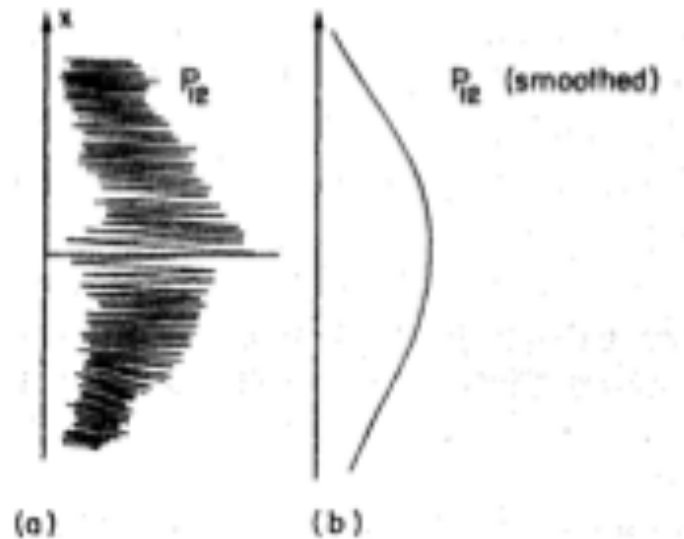
poiché h è **piccolissima** e $\lambda \propto m^{-1}$ è evidente che tutte le “particelle” del mondo “classico” risultano associate a onde con λ **estremamente piccola**, $\ll$ della scala di distanze caratteristica dei processi che li coinvolgono

Onde di materia

Ad esempio, nell'esperimento delle 2 fenditure con i proiettili: $m = 20 \text{ g}$, $v = 1000 \text{ km/h} \rightarrow \lambda \sim 10^{-34} \text{ m}$



$d \gg \lambda$ frange d'interferenza sono molto sottili e fitte $\rightarrow$ sorta di media che corrisponde alla figura "classica"



Onde di materia

Invece, per l'elettrone dell'atomo d'idrogeno

$$m_e \simeq 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad v \simeq 3 \times 10^3 \text{ km/s}$$



$$\lambda \simeq 2.4 \times 10^{-10} \text{ m}$$

confrontabile con le dimensioni dell'atomo, per cui, se l'ipotesi di de Broglie è vera, nella descrizione dell'atomo si dovrà tener conto della natura ondulatoria dell'elettrone



modello atomico di Bohr: quantizzazione dei
livelli energetici

Atomo di Bohr

Carica elettrica accelerata emette radiazione e.m. → modello “planetario” di Rutherford è instabile: in un tempo $\sim 10^{-11}$ s l'elettrone precipita sul nucleo

Aspetti peculiari della materia (difficili da spiegare con la fisica di inizio '900)

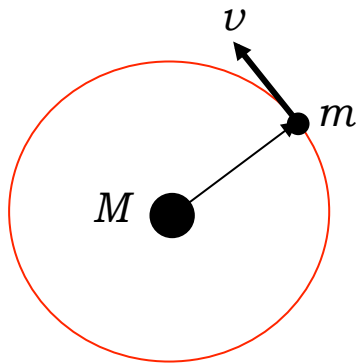
- ✓ costanza delle proprietà atomiche;
- ✓ cambiamento radicale delle proprietà tra atomi contigui nella tabella di Mendeleev

Osservazione sperimentale: quantizzazione dell'energia degli elettroni atomici ([esperimento di Franck-Hertz](#))

Atomo di Bohr

Ipotesi: quantizzazione del momento angolare dell'elettrone in rotazione intorno al nucleo

$$\begin{aligned}\text{N.B. } - [h] &= [E T] = [M L^2 T^{-2} T] \\ &= [M L^2 T^{-1}] = [M L T^{-1}] \times [L] \\ &= \text{impulso} \times \text{distanza}\end{aligned}$$



$$\boxed{m v_n r_n = n \hbar} \quad (n \in N) \quad (1)$$

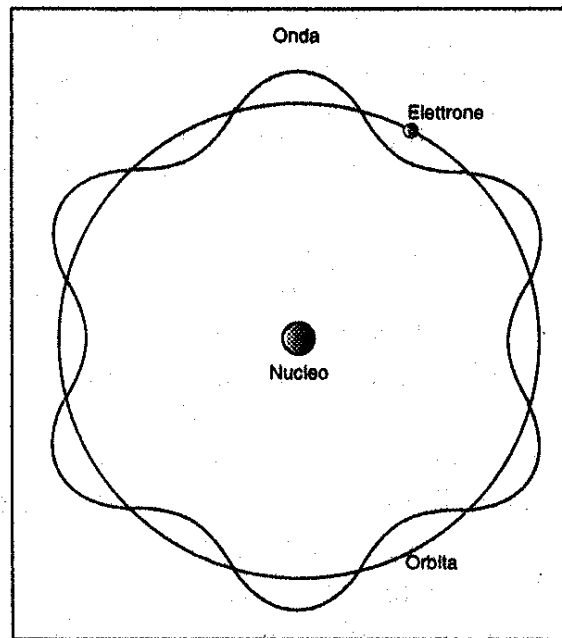
$$\longrightarrow r_n = n \frac{h}{2\pi} \frac{1}{m v_n}$$

de Broglie $\rightarrow$

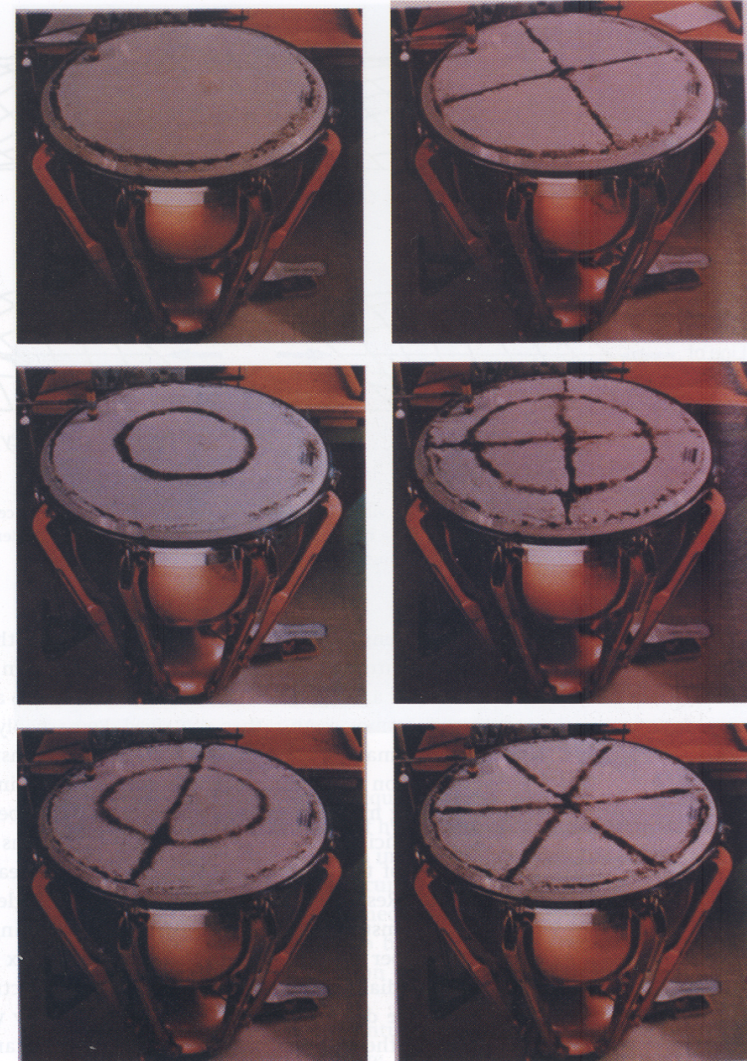
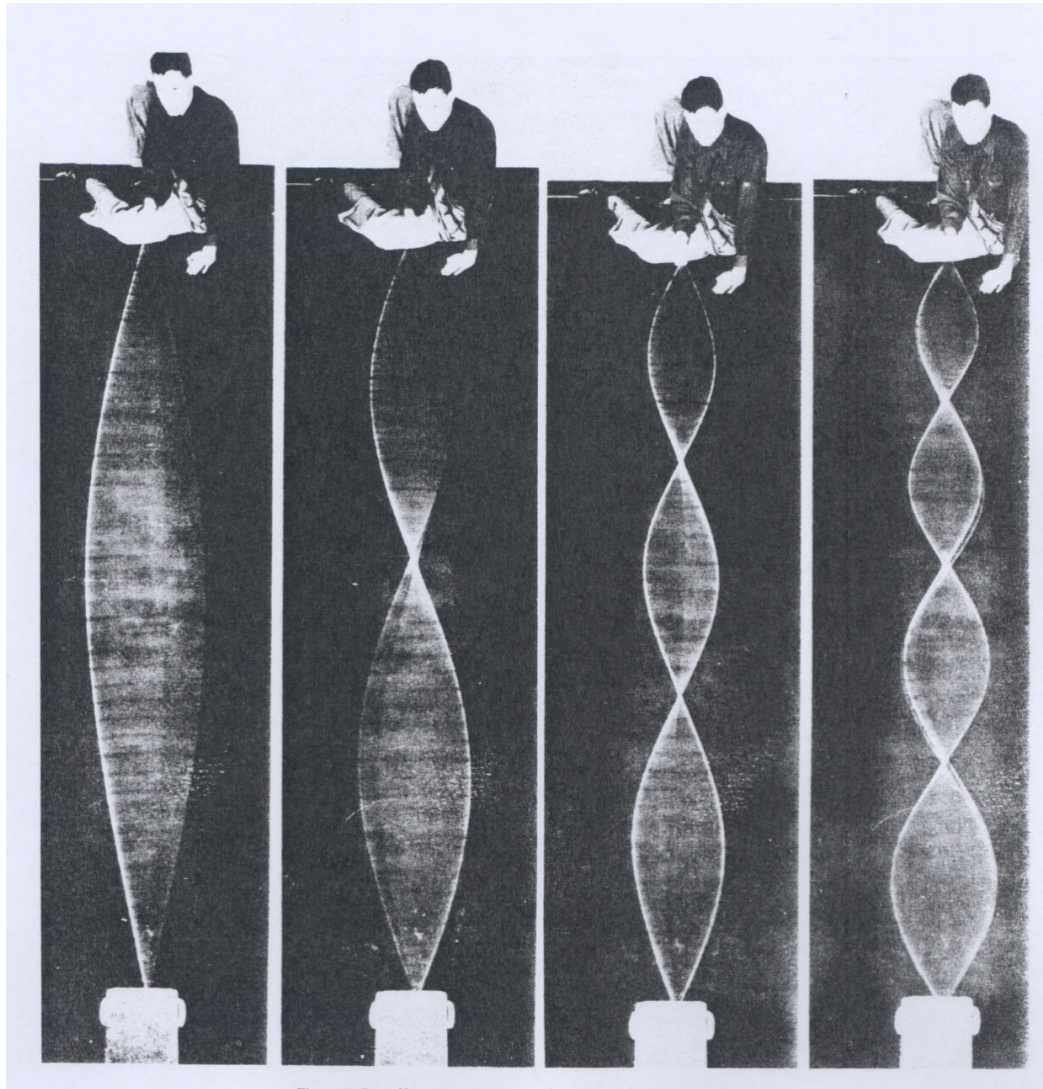
$$r_n = \frac{n}{2\pi} \lambda \quad \longrightarrow \quad \boxed{2\pi r_n = n \lambda}$$

Atomo di Bohr

i.e., le orbite permesse sono quelle nella cui circonferenza sono contenute un numero intero di lunghezze d'onda → condizione di stazionarietà per l'onda di de Broglie associata all'elettrone atomico → l'elettrone non irraggia → proprietà atomiche costanti



Atomo di Bohr



Atomo di Bohr

Conseguenze dell'ipotesi di Bohr

Attrazione coulombiana $e^- - p$ agisce come forza centripeta

$$\frac{m v_n^2}{r_n} = k_e \frac{e^2}{r_n^2} \quad (2)$$

$$\longrightarrow (m v_n)^2 = m k_e \frac{e^2}{r_n} \stackrel{(1)}{=} n^2 \frac{\hbar^2}{r_n^2}$$

ovvero: $r_n = n^2 a_0 \quad (3) \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{k_e e^2 m} = 0.53 \text{ \AA}$

(raggio di Bohr)

Atomo di Bohr

Energia dell'elettrone che percorre n -esima orbita

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 - k_e \frac{e^2}{r_n}$$

$$(2) \rightarrow = \frac{1}{2} k_e \frac{e^2}{r_n} - k_e \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{2} k_e \frac{e^2}{r_n}$$

$$(3) \rightarrow = -\frac{1}{2 n^2} \frac{k_e e^2}{a_0}$$



l'energia è quantizzata

N.B. - livello di minima energia $E_1 = -13.6$ eV (potenziale di ionizzazione dell'idrogeno)

Onde di probabilità

Elettroni come onde, ma che tipo di onde? Come la luce? La luce è una vibrazione del campo e.m. Cosa oscilla nell'elettrone?

de Broglie: onda associata all'elettrone è distinta da questo → difficile da immaginare: solo utile formula

2-fenditure: misura della probabilità d'arrivo degli elettroni, che mostra interferenza ed è l'analogo dell'intensità dell'onda d'acqua → ottenuta come “quadrato” di una **ampiezza di probabilità quantistica ψ** (funzione d'onda)

$$P_1 = |\psi_1|^2$$

$$P_2 = |\psi_2|^2$$

$$P_{12} = |\psi_1 + \psi_2|^2$$



$$P_{12} \neq P_1 + P_2$$

Onde di probabilità

(M. Born)

1. La probabilità di un evento in un esperimento ideale è data dal quadrato di un numero complesso detto ampiezza di probabilità

$$P = |\psi|^2$$

2. Evento che può avvenire secondo varie alternative: ampiezza di probabilità = somma ampiezze per le varie alternative considerate separatamente (principio di sovrapposizione) → interferenza

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad \longrightarrow \quad P = |\psi_1 + \psi_2|^2$$

3. Esperimento in grado di determinare quale tra possibili alternative è realizzata: probabilità = somma di quelle delle alternative → no interferenza

$$P = P_1 + P_2$$

Onde di probabilità

Probabilità è ingrediente essenziale: limitazione di “principio”, su cosa possiamo conoscere di un sistema e non come mera limitazione “pratica” (fisica classica)

2-fenditure → punto d'arrivo degli elettroni intrinsecamente imprevedibile: possiamo fare solo affermazioni di natura statistica

Arrivo dell'elettrone sullo schermo → f.d'o., inizialmente diffusa in tutto lo spazio, collassa alla regione di spazio delimitata dal rivelatore, in un modo che non sappiamo descrivere (... uno dei tanti misteri) → impossibile definire il concetto di traiettoria: prima che arrivi al rivelatore non possiamo dire nulla di definito sulla posizione dell'elettrone

Effetto Fotoelettrico

Emissione di elettroni da parte di metalli la cui superficie è investita da un intenso fascio di luce (von Lénárd, 1902)

Osservazioni sperimentali:

- maggiore è l'intensità della luce, maggiore è il numero di elettroni (tutti con la stessa energia) emessi
- maggiore è la frequenza della luce incidente, maggiore è l'energia degli elettroni

inspiegabili nell'ambito della fisica classica: l'energia di un'onda e.m. dipende dall'intensità, non dalla frequenza ν

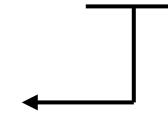
Einstein (1905): l'energia del fascio di luce è distribuita in quanti di grandezza $h\nu$, interamente trasferibili all'elettrone

Effetto Fotoelettrico

Energia elettroni emessi:

$$T = h\nu - W$$

lavoro d'estrazione dell'elettrone dal
metallo (indipendente da ν)



maggiore intensità luminosa $\rightarrow$ maggior numero di quanti $\rightarrow$ maggior numero di elettroni emessi con energia T

Einstein (1915): nelle interazioni con la materia i quanti trasferiscono, oltre all'energia, anche un impulso

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

(la formula di de Broglie è
di Einstein !!)



rafforzato lo status particellare della luce: **fotoni**

Fotone

Idea di Einstein corroborata dall'osservazione dell'effetto Compton:
diffusione dei raggi X da parte di elettroni

$$E = h \nu \quad \text{e. fotoelettrico}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{e. Compton}$$



$$E = h \frac{c}{\lambda} = p c$$

il fotone ha massa = 0 !!

N.B. - relatività speciale $\rightarrow E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$

Atomo di Bohr

Salto dell'elettrone tra due orbite $r_n \rightarrow r_m$ ($n > m$) $\rightarrow$ atomo emette fotone di energia

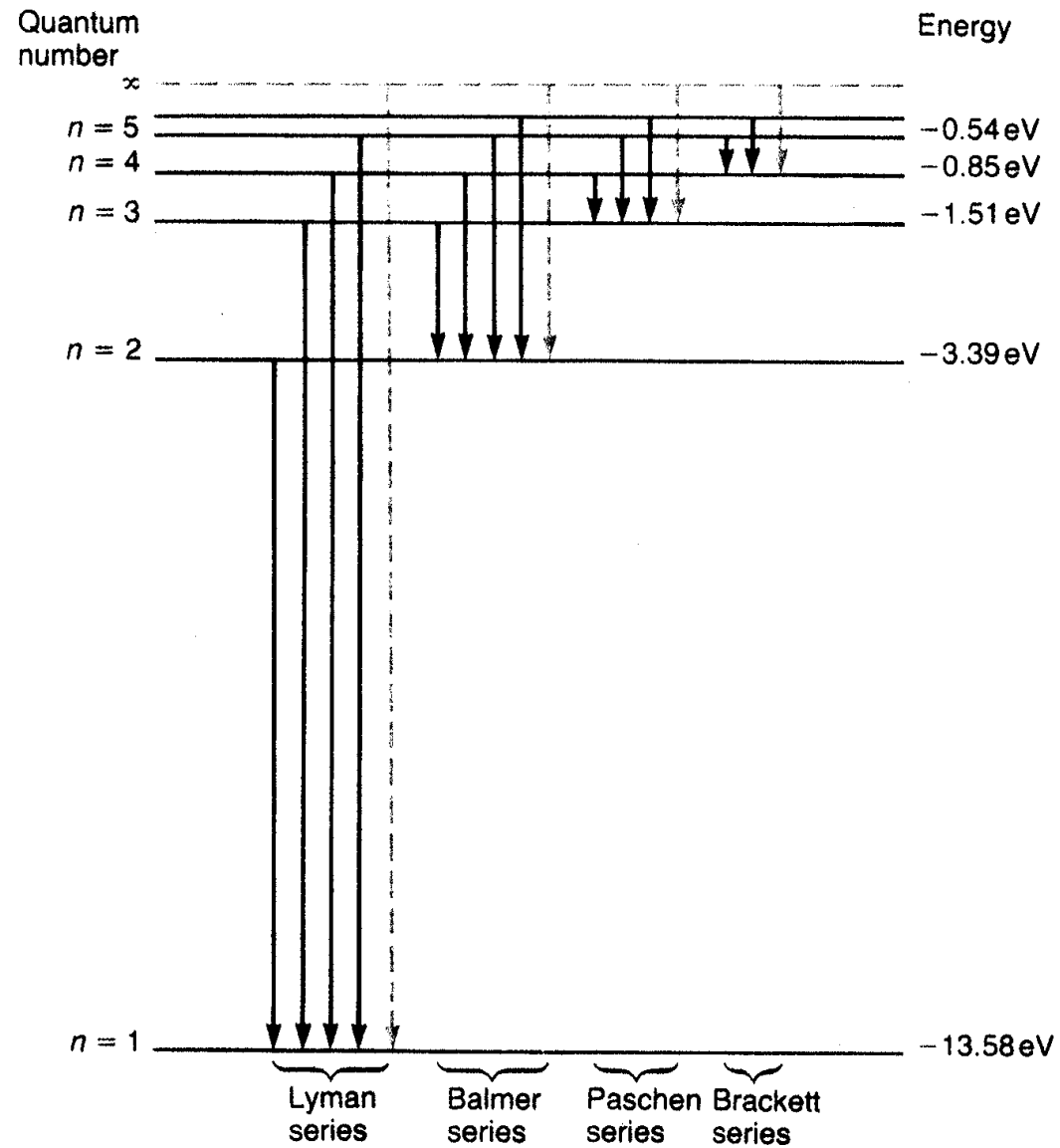
$$\begin{aligned} E_{nm} &= E_n - E_m \\ &= \left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2m^2} \right) \frac{k_e e^2}{a_0} \end{aligned}$$

quindi (formula di [Einstein](#)), di frequenza:

$$\nu = \frac{E_{nm}}{h} = \frac{k_e e^2}{4\pi \hbar a_0} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

(formula di [Rydberg](#))

Atomo di Bohr (II)



Idrogeno

434.01 nm

486.074 nm

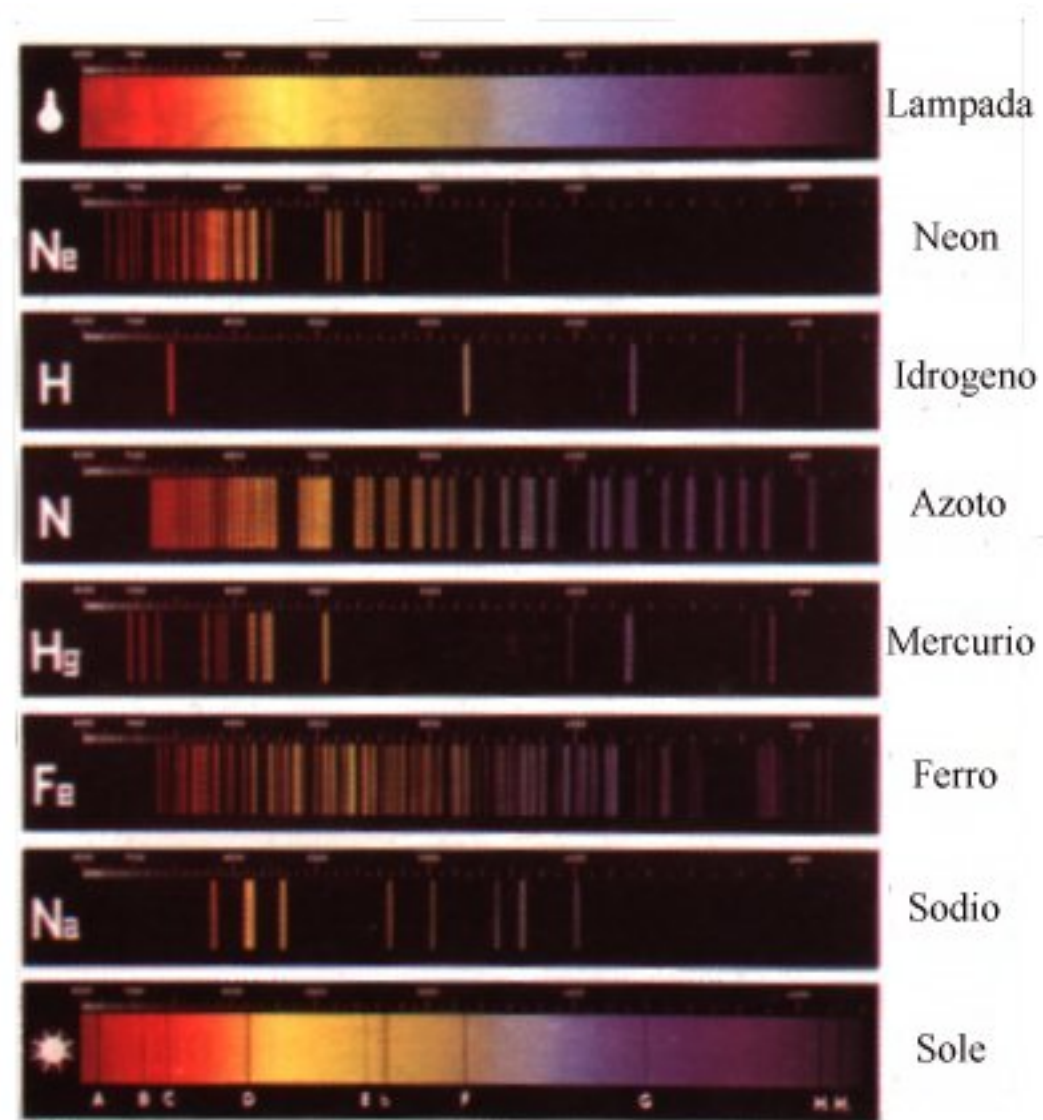
656.21 nm



410.12 nm

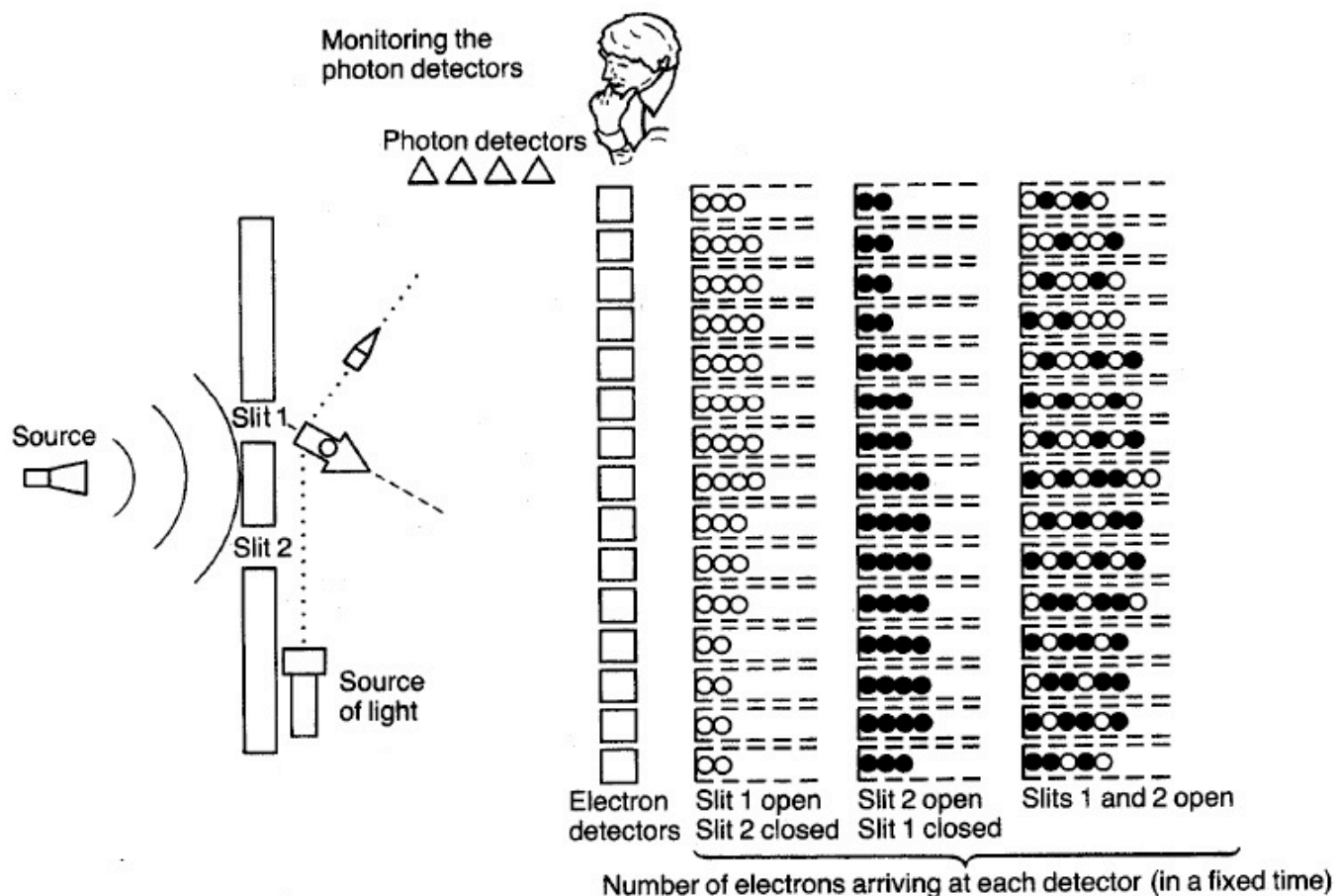


Spettri atomici



Osservando gli elettroni (II)

2-fenditure con gli elettroni + osservatore rivisto alla luce del concetto di fotone



Osservando gli elettroni (II)

per osservare un oggetto ci vuole almeno un **fotone**: effetto trascurabile su un proiettile, considerevole sull'elettrone

come ridurre tale effetto? diminuiamo l'intensità della sorgente di luce? **NO!** riduciamo solo il numero di fotoni, dobbiamo **ridurre l'impulso p** → diminuire (aumentare) $v(\lambda)$

quando λ diviene confrontabile con la separazione tra le fenditure d , il lampo diviene sfocato → non siamo più in grado di stabilire per quale fenditura è passato l'elettrone e $P'_{12} \rightarrow P_{12}$

per $\lambda \gg d$ la perturbazione introdotta dal fotone è trascurabile
→ riotteniamo l'interferenza

Principio d'Indeterminazione

(Heisenberg)

Risultato generale della teoria quantistica:

è impossibile realizzare un dispositivo il cui scopo sia quello di determinare per quale foro passa l'elettrone senza nel contempo perturbarlo a tal punto da distruggere la figura d'interferenza

Matematicamente:

$$\Delta x \Delta p \geq h$$

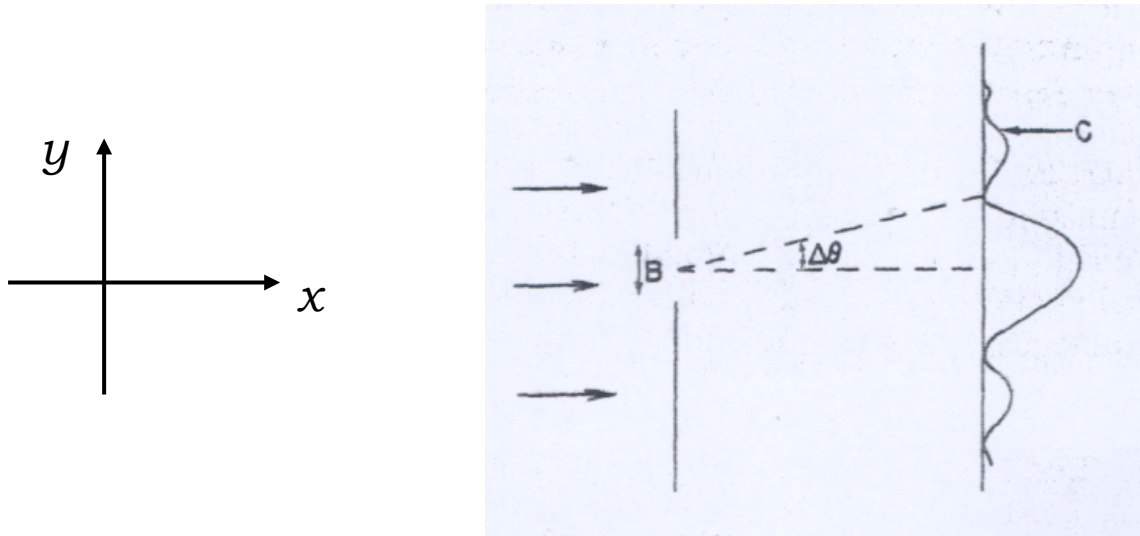
incertezza
nella posizione

incertezza
nell'impulso

Principio d'Indeterminazione

l'indeterminazione è una diretta conseguenza del carattere ondulatorio delle particelle

Esempio: fascio di particelle che incide su fenditura



particelle hanno tutte $p_x = p_0$ e $p_y = 0$, i.e. componente dell'impulso perpendicolare alla fenditura è perfettamente nota

Principio d'Indeterminazione

Passaggio attraverso fenditura $\rightarrow$ conoscenza della coordinata y con incertezza $\Delta y \sim l$; diffrazione oltre la fenditura $\rightarrow$ indeterminazione in p_y



- **prima della fenditura:** conosco p_y ma non y
- **dopo la fenditura:** conosco y ma perdo informazione su p_y

$$\Delta p_y \sim p_0 \Delta \theta$$

angolo sotteso dal
primo minimo

Principio d'Indeterminazione

$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{l} \quad \rightarrow \quad \Delta p_y \sim p_0 \frac{\lambda}{l}$$

de Broglie $\rightarrow$ $\Delta p_y \sim \frac{h}{l}$



$$\Delta y \Delta p_y \sim h$$

y e p_y sono variabili incompatibili

Principio d'Indeterminazione

ogni operazione di misura disturba il sistema

✓ Mondo Classico

- possibile ridurre a piacere l'entità della perturbazione
- ogni interazione è governata da leggi deterministiche → possibile correggere l'effetto introdotto dalla perturbazione → misure con livello d'accuratezza arbitrario

✓ Mondo Quantistico

- impossibile perturbazione arbitrariamente piccola
- perturbazione non può essere corretta (effetto del fotone nell'interazione con gli elettroni è imprevedibile)

Principio d'Indeterminazione

ignoranza classica

vs

incertezza quantistica



il mondo è in uno stato ben definito ma si dà il caso che non sappiamo qual è



casualità soggettiva



particelle in stato ben definito
sono in grado di passare allo stesso
tempo attraverso 2 fenditure



casualità oggettiva

dicotomia non astratta: **figura d'interferenza !!**

Principio d'Indeterminazione

- Concetto di traiettoria

Fisica classica → richiede conoscenza simultanea di posizione e velocità → impossibile da definire nella teoria quantistica

... risultati dell'esperimento delle 2 fenditure sono così stupefacenti perché pretendiamo di applicare concetto classico di traiettoria anche dove non è possibile.

- Modello atomico di Rutherford

elettroni finiscono sul nucleo, i.e. confinati in regione spaziale di dimensioni $\approx 0 \rightarrow$ impulso $\rightarrow \infty$

Principio d'Indeterminazione

... possibile stimare le dimensioni dell'atomo di H

raggio atomico $a \sim$ indeterminazione nella posizione dell'elettrone
→ indeterminazione nell'impulso $\sim h/a$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{2m} \sim \frac{h^2}{2ma^2} \Rightarrow E \sim \frac{h^2}{2ma^2} - k_e \frac{e^2}{a}$$

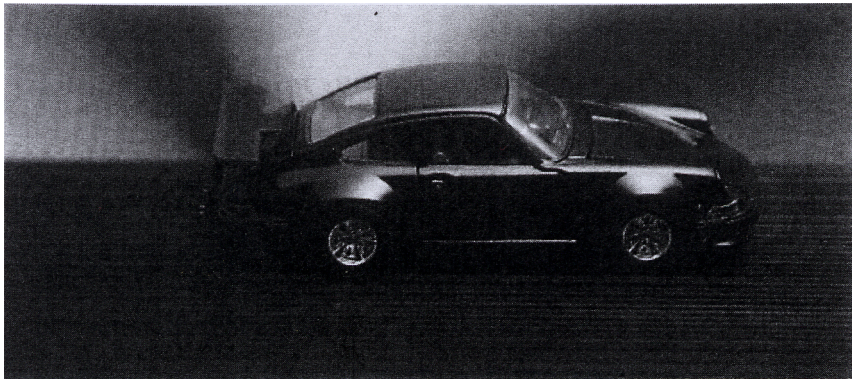
stato fondamentale = stato di energia minima:

$$\frac{dE}{da} = 0 \quad \rightarrow \quad a \sim \frac{h^2}{k_e m e^2} \sim a_0$$

Indeterminazione Energia-Tempo

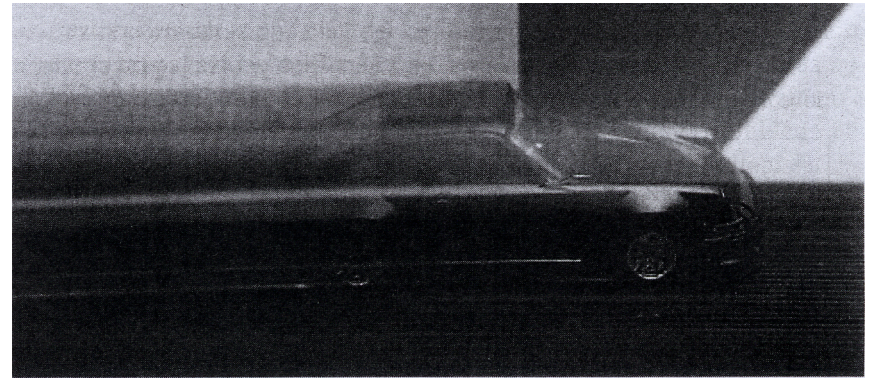
$$\Delta E \Delta t \geq h$$

... è concessa qualunque violazione della legge di conservazione dell'energia per un tempo corrispondentemente piccolo



piccolo tempo d'esposizione

forma **SI** - velocità **NO**



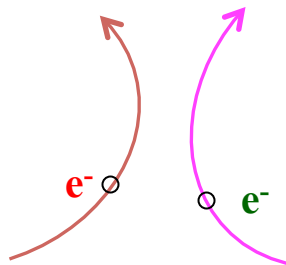
grande tempo d'esposizione

forma **NO** - velocità **SI**

Indeterminazione Energia-Tempo

Fondamentale per lo studio delle interazioni tra le particelle: bosoni vettori $\rightarrow$ particelle virtuali $\rightarrow$ incredibili proprietà del vuoto quantistico

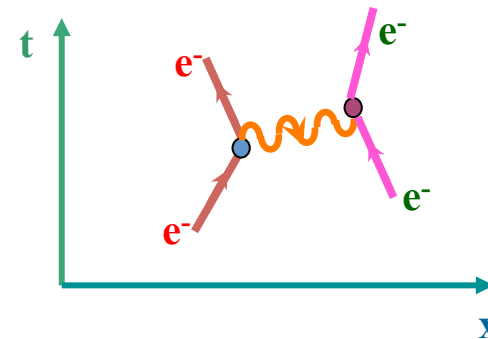
Fisica Classica



e^- si avvicinano $\rightarrow$ mutua repulsione
 $\rightarrow$ rallentati e deviati

azione a distanza

Fisica Quantistica



● e^- emette $\gamma \rightarrow$ cambia velocità

● e^- assorbe $\gamma \rightarrow$ cambia velocità

interazione = scambio del γ

Indeterminazione Energia-Tempo

Decadimento esponenziale di livello atomico eccitato

$$e^{-t/\Delta t}$$

vitamedia Δt del livello $\rightarrow$ indeterminazione nell'energia

$$\Delta E = \frac{h}{\Delta t}$$

$$\Delta E = h \Delta \nu \quad \rightarrow \quad \Delta \nu = \frac{1}{\Delta t}$$

i.e. linea spettrale è di larghezza finita, inversamente proporzionale alla vitamedia del livello

Indeterminazione Energia-Tempo

- ✓ atomo di H → livello eccitato: spin di elettrone e protone sono paralleli $\uparrow\uparrow$ → transizione allo stato fondamentale $\downarrow\uparrow$ con vita media $\tau = 12$ milioni di anni → riga spettrale ($\lambda = 21$ cm) è incredibilmente stretta: $\Delta\nu = 5 \times 10^{-16}$ Hz

fondamentale in radioastronomia: sono facilmente rivelabili minime variazioni $\Delta\lambda$ associate a shift Doppler → misura della velocità delle nubi di H → distanza tramite flusso di Hubble

- ✓ particelle che decadono molto rapidamente (risonanze) → energia (massa) non ben definita

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{h}{c^2 \tau}$$

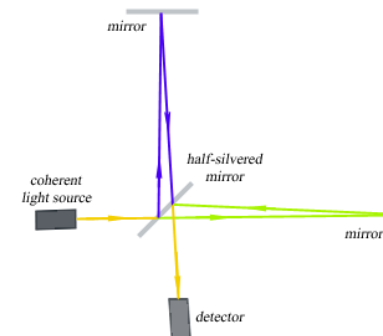
mesone ρ : $m = 770$ MeV, $\tau = 4.4 \times 10^{-24}$ s → $\Delta E \approx 150$ MeV

Fotoni

Fotone come particella? → attenuiamo intensità della sorgente di luce nell'interferometro di Michelson in modo da avere un solo fotone nell'apparato e inseriamo un rivelatore di fotoni in ciascun ramo (dopo il beam-splitter e prima dello specchio)

Cosa osserviamo? I rivelatori non producono mai segnale allo stesso istante:

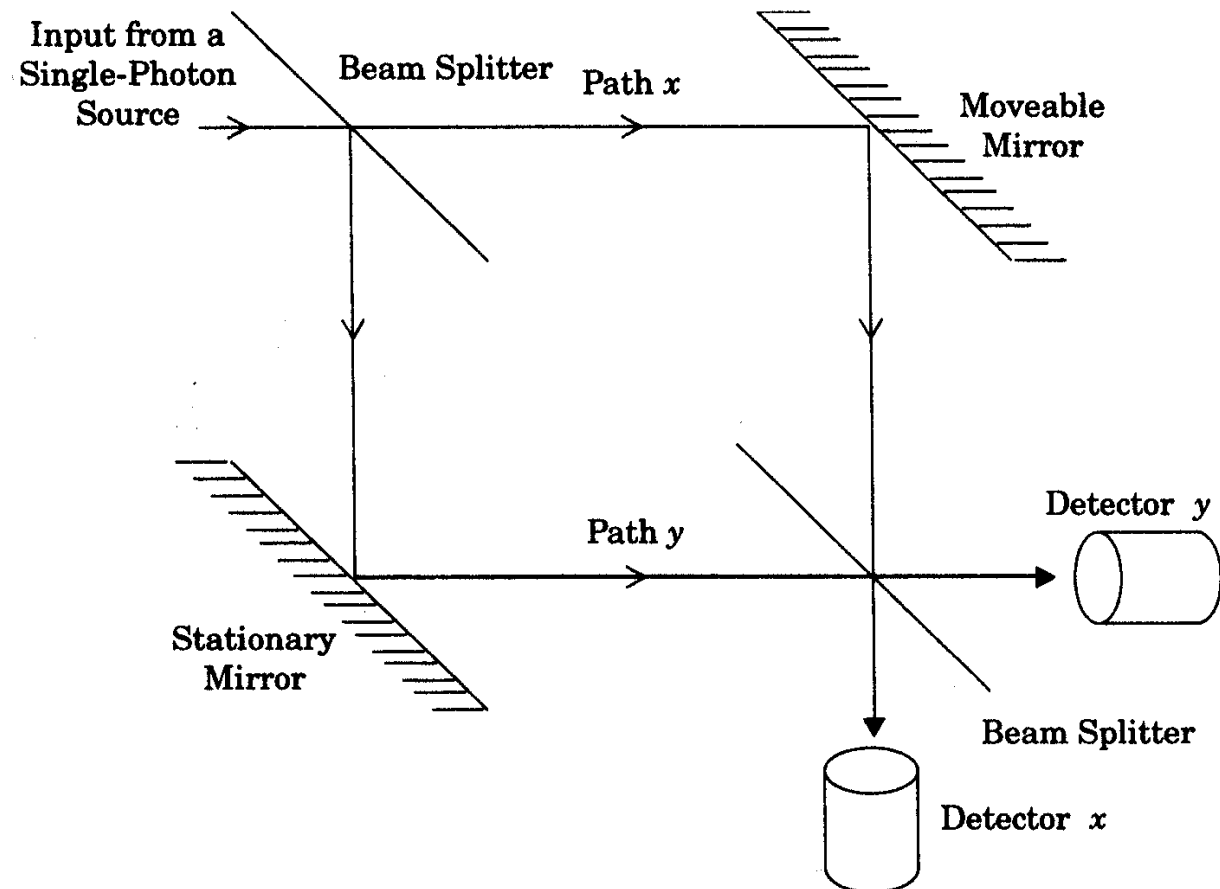
il fotone o segue il ramo → o quello ↑



NB - il fotone non viene “spezzato” dal beam-splitter! se così fosse si avrebbero 2 fotoni di energia, e quindi frequenza ($E = h \nu$), dimezzata!

Fotoni

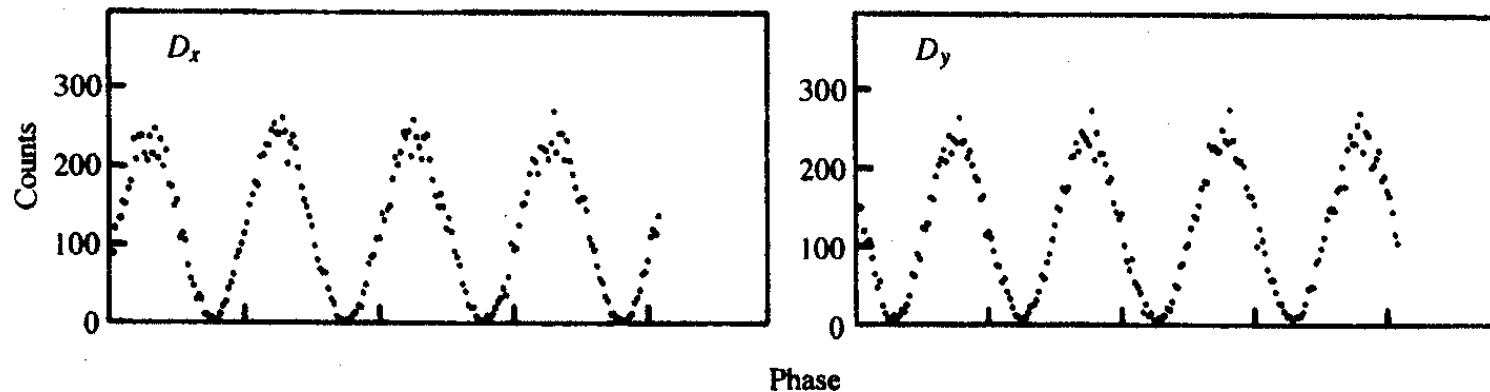
... ancora un esperimento con doppia fenditura:
l'interferometro Mach-Zender



Fotoni

... con un solo fotone nell'apparato: esperimento di Grangier, Roger, Aspect (*Europhys. Lett.* **1**, 173 (1986))

figura d'interferenza registrata su ciascun rivelatore al variare della differenza di cammino ottico (fase) tra i 2 rami dell'interferometro



... il fotone percorre entrambe i rami !

Fotoni

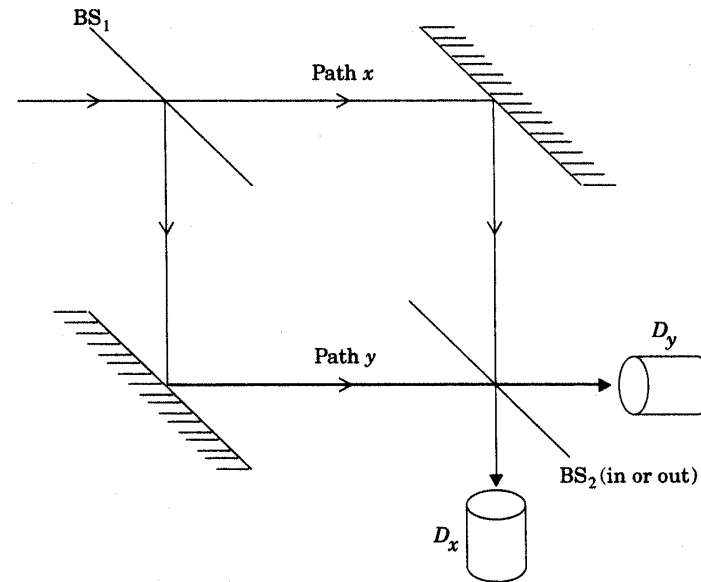
Teoria della cospirazione: il fotone (ma anche, l'elettrone, il neutrone, l'atomo ...) riconosce il tipo di apparato sperimentale costruito e **aggiusta di conseguenza la sua natura** → in un apparato pensato per stabilire per quale ramo (fenditura) è passato si comporta come particella; in uno realizzato per osservare l'interferenza si comporta come onda

possibile che il fotone si comporti davvero così?

Proposta di **Wheeler**: ritardare la scelta su quale aspetto osservare a dopo che il fotone ha “deciso” cosa essere → esperimenti a **scelta ritardata**

Fotoni

interferometro Mach-Zender dove il secondo beam-splitter può essere inserito o rimosso a piacere



- BS_2 assente $\rightarrow D_x$ e D_y registrano quale ramo è stato percorso dal fotone: $x \rightarrow D_x$, $y \rightarrow D_y$
- BS_2 inserito $\rightarrow$ esperimento d'interferenza: non sappiamo più nulla sul percorso seguito dal fotone

Fotoni

Scelta ritardata: inizialmente BS_2 è assente e viene inserito solo dopo che il fotone ha passato BS_1

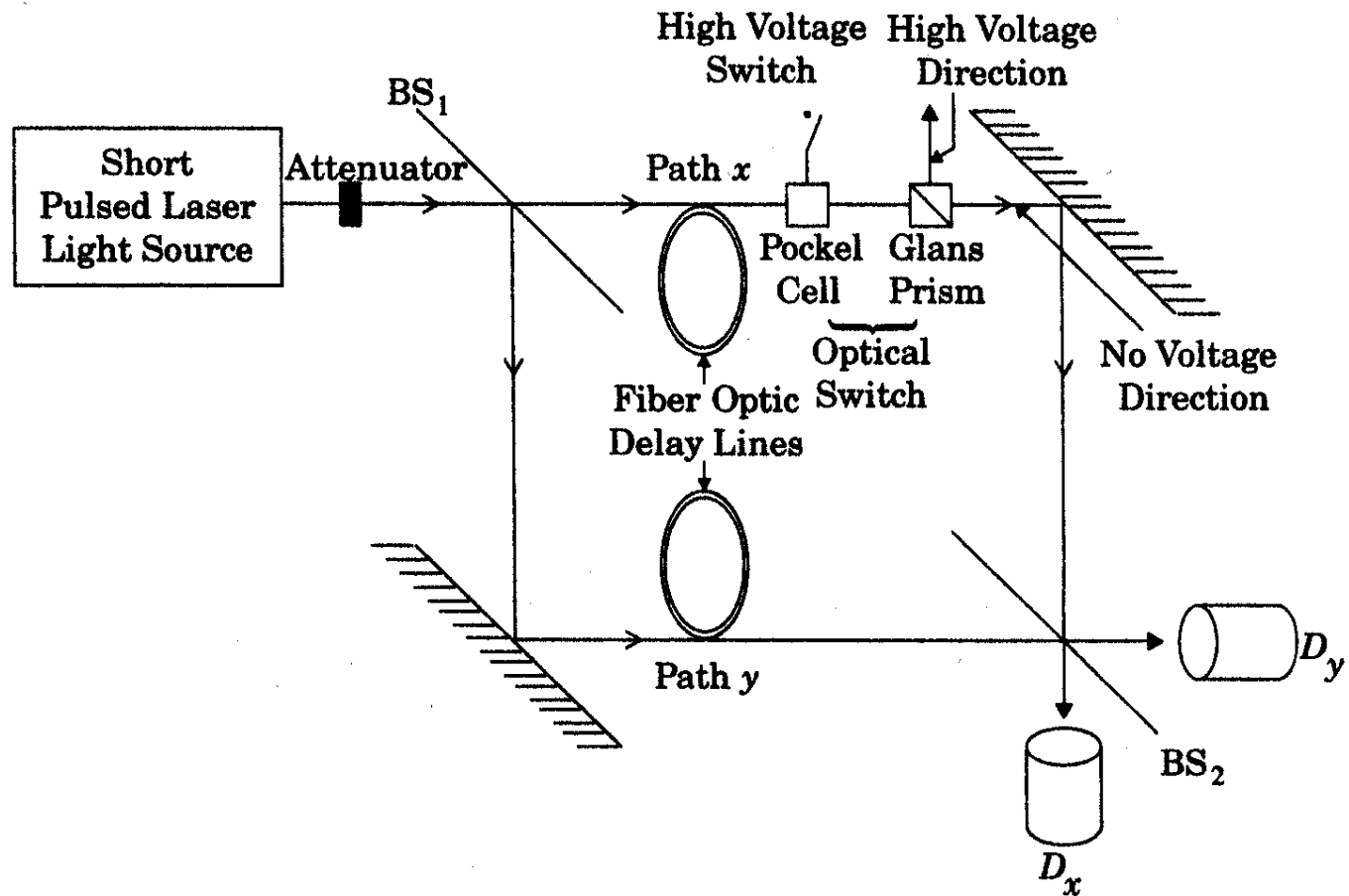
Secondo la teoria della cospirazione ciascun fotone si comporta come una particella (BS_2 è inizialmente disinserito) e sceglie uno dei 2 rami con probabilità $1/2$.

La successiva inserzione di BS_2 non cambia questa scelta e, anche se esso è presente, quando il fotone lo raggiunge non può dar luogo a interferenza!

Ma cosa succede nella realtà?

Fotoni

T. Hellmuth et al. *Phys. Rev. A* **35**, 2532 (1987)



Fotoni

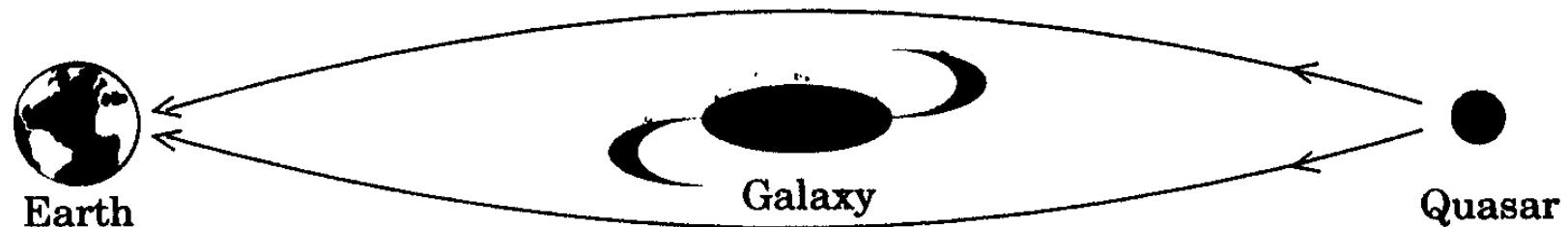
Risultato sperimentale:

non importa quando BS_2 viene inserito, si osserva una figura d'interferenza; viceversa, se si comincia con BS_2 inserito e successivamente (dopo che il fotone aveva passato BS_1) lo si rimuove, l'interferenza non è mai visibile → incredibile!

Questo risultato non è quello che ci dice la teoria della cospirazione, ma è in perfetto accordo con la Meccanica Quantistica: il fotone può passare dal percorrere un solo ramo o entrambi in qualunque momento della sua storia, non impazzisce mai! Fa sempre la scelta giusta, anche se cambio le carte!

Fotoni

gedanken experiment proposto da Wheeler



Nel punto di intersezione delle due traiettorie posso mettere o meno un beam-splitter → **inserito**: vedo **due immagini**; **disinserito** vedo l'**interferenza**

il fotone è partito miliardi di anni fa, quale differenza può fare sul suo percorso la mia decisione di oggi?

Fotoni

Scelta ritardata → la semplice rappresentazione della dualità onda-corpuscolo è inadeguata: quando la luce è entrata nell'interferometro non la possiamo più pensare come un'onda o una particella → nuovo punto di vista, che non sia la composizione di parti di teorie classiche

Chiedere come il fotone sceglie il percorso è un residuo della concezione classica: possiamo solo conoscere la probabilità delle varie possibilità

Principio di sovrapposizione: singola “particella” può essere preparata in una sovrapposizione di stati, e per ciò non è più localizzabile → “... *somma di più ampiezze complesse di cui eseguire il modulo quadro ...*”

Copenhagen

Principio di Complementarità (Bohr) $\oplus$ Relazioni d'Incertezza (Heisenberg) $\rightarrow$ interpretazione di Copenhagen

1. **Heisenberg**: impossibile conoscere posizione e impulso di una particella a causa del disturbo dell'apparato misura
 2. **Bohr**: posizione e impulso di una particella sono proprietà complementari, i.e., non possono essere misurate dallo stesso apparato
- $\rightarrow$ proprietà dei sistemi quantistici non esistono indipendenti dall'apparato; piuttosto, i valori ottenuti in una misura sono creati dall'apparato con probabilità per i risultati possibili determinati dalla f. d' o. Ψ , che influenza e viene influenzata dall'apparato stesso (origine del salto quantico)

Paradosso della Misura

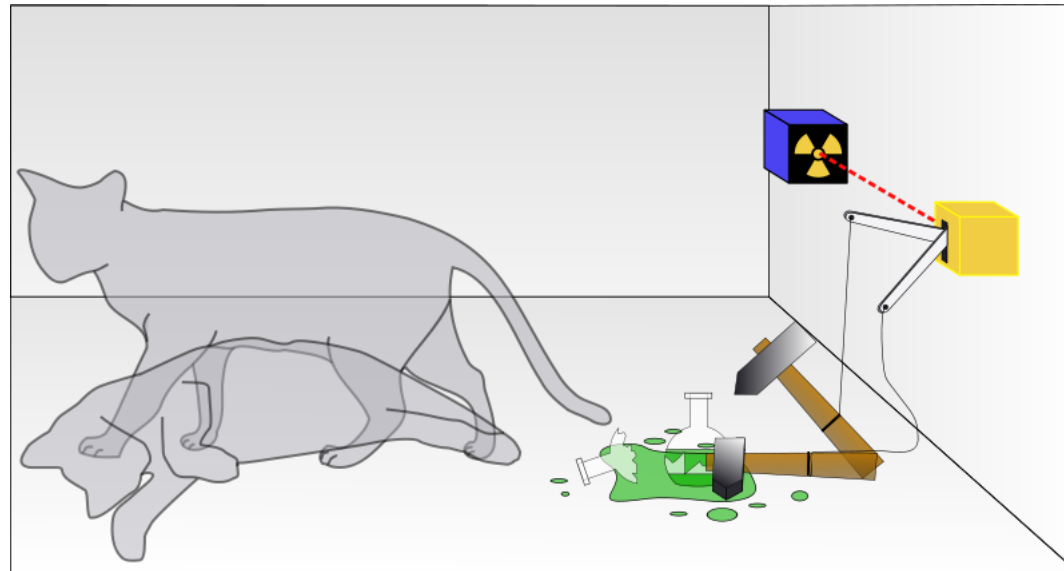
Sistema quantistico può esistere in una sovrapposizione di diversi stati quantistici → processo di misura fa collassare la sovrapposizione in uno **stato classico** (i.e. che può essere definito per mezzo dello stato di un rivelatore classico) → soltanto dopo la misura possiamo parlare di sistema quantistico con definite proprietà

apparentemente, è l'osservatore a decidere quali proprietà misurare e quando farlo

Schrödinger insoddisfatto da questa interpretazione: il problema è che ogni cosa è quantistica e quindi non si vede perché dividere il mondo in oggetti classici (rivelatori) e quantistici (atomi, ...)

Paradosso della Misura

Schrödinger: nulla che impedisce alla irrealtà microscopica di infettare il mondo macroscopico → paradosso del gatto



$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{gatto vivo}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{gatto morto}\rangle$$

Mostra come separazione richiesta dalla teoria tra mondo classico e quantistico sia mal definita e insoddisfacente

Paradosso della Misura

Come fa l'osservazione a far collassare la f.d'o. in una delle 2 alternative? [von Neumann](#) & [Wigner](#): coscienza osservatore gioca un ruolo importante

Cosa accade se qualcuno può guardare dentro la scatola tramite una finestra ([amico di Wigner](#))? Possiamo chiedergli se il gatto è morto quando è decaduto il nucleo o quando abbiamo aperto la scatola? O è l'amico di Wigner che, guardando, ha fatto collassare la f.d'o.?

Unico aspetto non-quantistico è la coscienza? → perché differenti osservatori concordano sulla rappresentazione del mondo?

Molti Mondi

(Everett)

REVIEWS OF MODERN PHYSICS

VOLUME 29, NUMBER 3

JULY, 1957

“Relative State” Formulation of Quantum Mechanics*

HUGH EVERETT, III†

Palmer Physical Laboratory, Princeton University, Princeton, New Jersey

Bohr: apparato di misura classico seleziona **solo uno** degli stati della sovrapposizione quantistica

Everett: tutte le possibilità sono realizzate, ma ognuna in una **diversa copia dell'universo**, ciascuna delle quali è essa stessa costantemente soggetta a moltiplicazione in corrispondenza di ogni processo di misura → **no collasso della f.d'o.** → **“multiverso” di universi paralleli**

Molti Mondi

idea affascinante ma problematica:

- ✓ costretti a supporre che i vari universi non possono comunicare tra loro (e che in ognuna di essi è presente una nostra copia ...)
- ✓ diramazione della f.d'o. = struttura ad albero → no associazione del particolare presente con alcun particolare passato → la configurazione del mondo - noi compresi - cambia in modo discontinuo → perché, invece, abbiamo l'illusione che il mondo cambi in modo continuo?

Bell: è la memoria - un fenomeno del presente - a darci l'impressione di continuità → *“... qualora [questa teoria] fosse presa sul serio sarebbe difficile prendere sul serio qualsiasi altra cosa”*

Bohr vs Einstein

Il dibattito sull'interpretazione della **Meccanica Quantistica** imperversò fin dagli inizi degli anni '30.

Attori principali: **Bohr** e **Einstein**



Teatro: Conferenza Solvay a Bruxelles



17/29 hanno vinto il Nobel

Bohr vs Einstein

Bohr

campione della **interpretazione di Copenhagen**: prima di misurarla, la particella non possiede una posizione definita; tutto ciò che possiamo sperare di conoscere è la probabilità che essa si trovi in un certo punto.

La particella ha una posizione definita, nel senso consueto del termine, solo nel momento in cui la “osserviamo”, prima e dopo essa ha solo posizioni potenziali. Questo non significa che la particella ha una posizione che noi non riusciamo a conoscere se non dopo averla misurata: in realtà, prima che sia effettuata la misura, essa non possiede proprio una posizione definita → **atto di misura partecipa profondamente alla creazione della realtà osservata**

Bohr vs Einstein

Bohr

ogni speranza di ottenere una rappresentazione unificata della realtà oggettiva deve essere abbandonata; la teoria quantistica fornisce predizioni circa i risultati di una misura, ma – contrariamente alle precedenti teorie – non fornisce descrizione di “come la natura determina” il risultato stesso.

La stessa volontà di ricercare una tale descrizione è sbagliata e ingenua. Tutta la comprensione umana si esplica in termini di concetti classici modellati sull'esperienza diretta, ma il mondo quantistico è non-classico e non può essere compreso nei vecchi termini, nemmeno in linea di principio.

Bohr vs Einstein

Einstein

fin dall'inizio a disagio con i salti quantici: violano la località imposta dalla RS: un evento non può essere influenzato da eventi con cui non ha relazione una causale.

NB: Ψ di particella singola evolve nel tempo espandendosi su distanze arbitrariamente grandi; osservazione della particella in un punto $\rightarrow$ variazione istantanea della f. d'o. in tutto lo spazio in modo da impedire che altri osservatori, arbitrariamente lontani, possano osservare la particella nelle loro posizioni (Copenhagen) $\rightarrow$ misteriosa azione a distanza che svanisce se si rinuncia ad ammettere che Ψ fornisce una descrizione completa dello stato della particella e si ammette che essa possiede una posizione reale in tutti gli istanti di tempo

Bohr vs Einstein

Einstein

in realtà, ogni volta che cerchiamo di stabilire dove si trova la particella la troviamo sempre in una posizione definita → la f.d'o. è solo un surrogato temporaneo di una (ancora ignota) descrizione più precisa in grado di prevedere con esattezza la posizione della particella.

Cosa c'è di più naturale che attendersi che una particella fosse prima localizzata nel punto in cui viene trovata l'attimo dopo? Una conoscenza più approfondita della fisica dovrebbe fornirci questa informazione senza far uso della probabilità, che è l'elemento veramente più difficile da accettare (*“credete veramente che la Luna non si trovi lassù se nessuno la guarda?”*)

Bohr vs Einstein

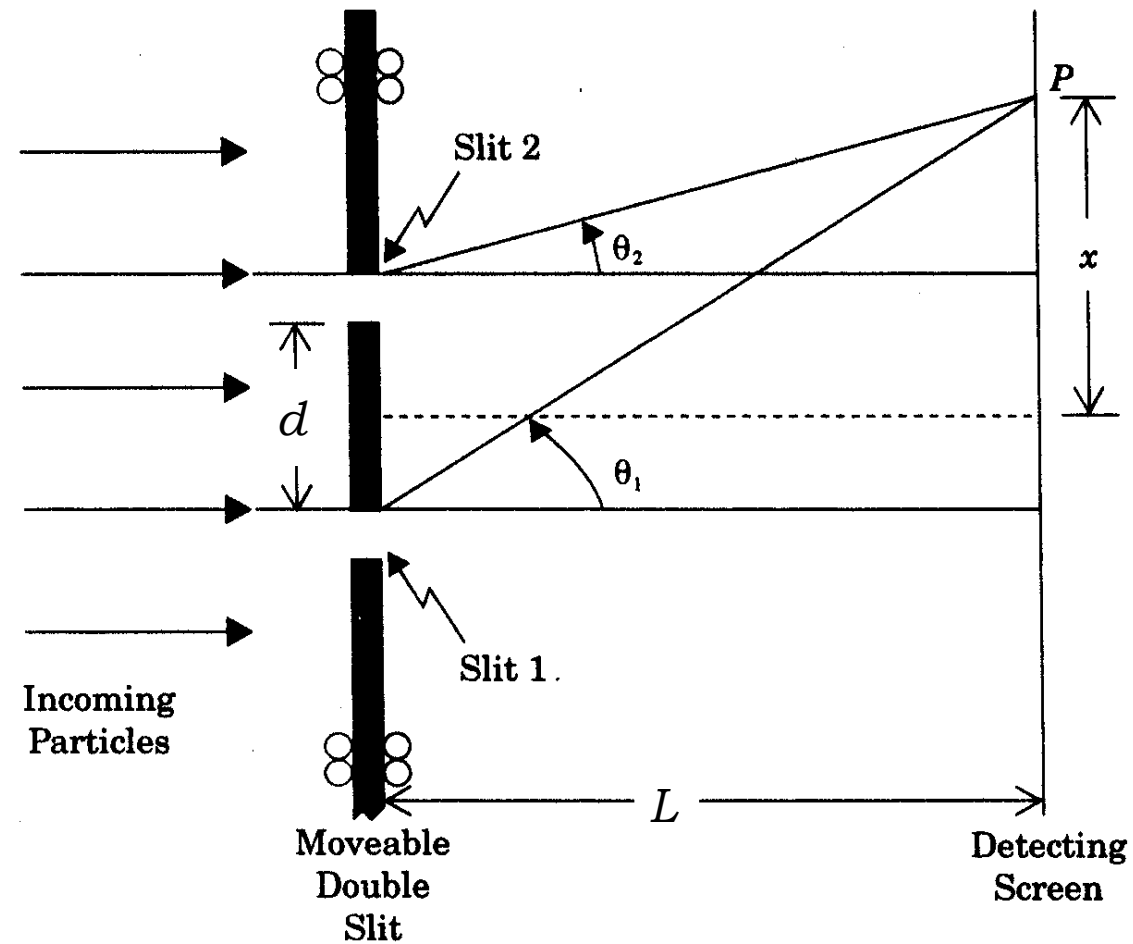
Einstein: MQ rinuncia a quello che è sempre stato lo scopo della scienza: la descrizione completa del mondo reale (supposto esistere indipendentemente da qualsiasi atto di osservazione). Questo ha comportato l'elaborazione di nuovi concetti per corrispondere con quella realtà, e così idee scientifiche quali forza, energia e impulso sono emerse nel corso di decenni di dibattito. Esse corrispondevano a importanti proprietà del mondo fisico e, per tale ragione, potevano essere utilizzate in modo produttivo per comprenderlo.

Secondo **Bohr** questa tradizione deve essere abbandonata.

punto di vista attuale (condiviso): l'universo quantistico implica revisione radicale della nostra concezione del mondo fisico, revisione finora non raggiunta.

Bohr vs Einstein

Einstein: ancora le 2 fenditure, ma mobili (1927)



Bohr vs Einstein

particella che arriva in P: nell'attraversare una delle fenditure riceve spinta verso l'alto → schermo rincula verso il basso, **più** o **meno** a seconda che la particella passi per il foro **1** o **2**

→ misura dell'entità del rinculo consente di stabilire per quale fenditura è passata la particella, mantenendo la figura d'interferenza

Bohr: impulso ricevuto dallo schermo

$$P(i) = P \sin \theta_i \simeq P \theta_i \quad (i = 1, 2)$$

→ per stabilire quale fenditura devo misurare il rinculo con un'accuratezza pari a:

$$\Delta P < P(1) - P(2) \simeq P(\theta_1 - \theta_2)$$

Bohr vs Einstein

P.d'I. → incertezza nella posizione della fenditura

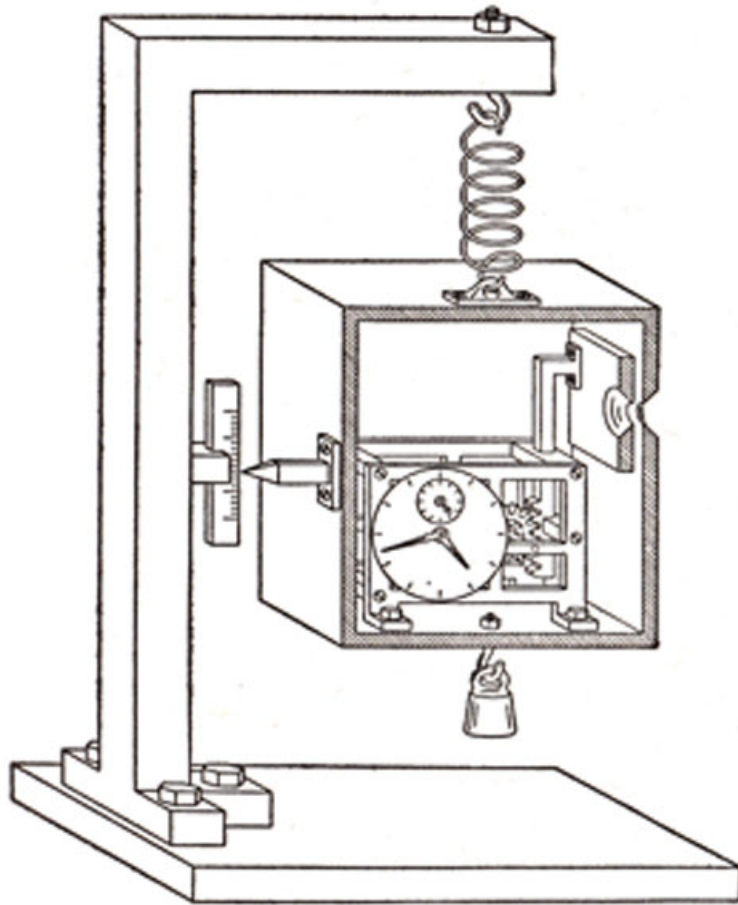
$$\Delta x > \frac{h}{\Delta P} \simeq \frac{h}{P(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\begin{aligned} \frac{x + d/2}{L} &= \tan \theta_1 \simeq \theta_1 \\ \frac{x - d/2}{L} &= \tan \theta_2 \simeq \theta_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \theta_1 - \theta_2 \simeq \frac{d}{L}$$

$$\text{i.e.} \quad \Delta x > \frac{h}{P} \frac{L}{d} = \frac{\lambda L}{d}$$

$\lambda L / d$ = distanza tra due massimi della figura d'interferenza →
l'incertezza nella misura della posizione della fenditura è sufficiente a
cancellare l'interferenza

Bohr vs Einstein



(disegno di Bohr)

Einstein: scatola di luce (1930)

scatola a pareti perfettamente riflettenti all'interno della quale è intrappolata una certa quantità di luce, che contribuisce al peso della scatola ($E = mc^2$); ad un dato istante, da un'apertura esce un solo fotone la cui energia è determinata misurando il peso della scatola → determinate con precisione arbitraria energia e istante d'emissione del fotone:

contraddizione con $\Delta E \Delta t > h$

come risponde Bohr? dimostra che Einstein nell'elaborazione dell'argomento ha dimenticato la Relatività Generale ...

EPR

... Einstein non demorde e nel 1935 ci riprova ...

MAY 15, 1935

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in

quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

nell'articolo viene proposto un *gedanken experiment* che dovrebbe dare sostegno all'idea che esiste una “realtà obiettiva”, indipendente dalla misura.

EPR

EPR partono dalla definizione di **elemento della realtà fisica**:
“se, senza disturbare in alcun modo un sistema, possiamo predire con certezza ... il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a tale quantità”

Esistono processi fisici che generano due particelle dotate di proprietà correlate (e.g., $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$). Le particelle prodotte si allontanano in direzioni opposte con velocità, in modulo, uguali. Anche le posizioni delle particelle sono strettamente correlate.

EPR usano processi di questo tipo per dimostrare che ogni particella ha, in realtà, una posizione e una velocità definite in qualsiasi momento.

EPR

Supponiamo di misurare la posizione di una delle due particelle → conoscenza indiretta della posizione dell'altra particella.

Dato che non abbiamo minimamente interferito con la 2^a particella, la sua posizione doveva essere quella anche prima della misura: noi l'abbiamo determinata solo in modo indiretto.

Avremmo potuto, però, scegliere di misurare la velocità della 1^a particella: in tal caso avremmo stabilito indirettamente la velocità della seconda, senza alterarla. Ancora una volta, dato che non abbiamo fatto assolutamente nulla alla 2^a particella, possiamo concludere che la sua velocità era la stessa già prima.

Mettendo insieme le due misure - **quella effettuata e quella che avremmo potuto effettuare** - **EPR** concludono che la seconda particella ha posizione e velocità definite in qualsiasi momento.

EPR

Mettendo insieme le due misure - quella effettuata e quella che avremmo potuto effettuare - EPR concludono che la seconda particella ha posizione e velocità definite in qualsiasi momento.

NB - Nell'esperimento EPR, se misuriamo la posizione alteriamo la velocità e viceversa. Se non conosciamo entrambe le proprietà della 1^a particella, non conosciamo nemmeno quelle della 2^a → no conflitto con il Principio d'Indeterminazione. EPR ammettono di non poter misurare simultaneamente la posizione e la velocità di una particella. Ciò nonostante (e questo è un punto fondamentale), anche senza stabilire posizione e velocità di entrambe le particelle, il ragionamento di EPR dimostra che ognuna ha una posizione e velocità definite. Per loro è una questione di realtà: una teoria non può dirsi completa se non è in grado di descrivere tutti gli elementi di realtà. La realtà, secondo EPR, è qualcosa di più dei dati letti sui rivelatori, o della somma di tutte le osservazioni effettuate in un dato momento: quando nessuno “guarda la Luna”, questa è pur sempre un elemento della realtà.

EPR

L'argomentazione di EPR si basa su un presupposto importante: se in un determinato momento possiamo determinare una proprietà di un oggetto A conducendo una misura su un altro oggetto B spazialmente distante dal primo, allora A ha la proprietà in questione. Il fondamento logico di questo assunto è semplice: la misura viene effettuata **qui** mentre l'altro oggetto si trova **lì** → **Principio di Località**: possiamo influenzare in modo diretto solo le cose che ci sono vicine, i.e., **sono possibili solo azioni "locali"**. Questa idea trae origine dalla constatazione che se la misurazione di A è in grado d'influenzare B, ciò non può che avvenire con un ritardo almeno uguale al tempo impiegato dalla luce a coprire la distanza tra A e B.

NB – il Principio di Località è tacitamente assunto nella descrizione dell'esperimento delle due fenditure; se rinunciamo alla località e ammettiamo la possibilità che chiudendo una fenditura potremmo alterare i cammini degli elettroni che attraversano l'altra, non saremmo più costretti a concludere che gli elettroni possono essere in due posti distinti nello stesso istante.

EPR

Nell'esperimento **EPR**, le due particelle sono esaminate allo stesso istante, per cui ciò che apprendiamo su B quando osserviamo A deve essere posseduto da B in modo del tutto indipendente dal fatto che la misurazione venga effettuata. **EPR** sostengono che un oggetto A non risente in alcun modo di ciò che facciamo ad un oggetto B spazialmente separato da A.

L'alternativa - secondo **EPR** - sarebbe di rendere realtà seconda particella dipendente dal processo di misura eseguito sulla prima. Anche se non la escludono logicamente, **EPR** disdegnano questa **non-località** e suggeriscono, invece, l'incompletezza della **MQ**.

Paradosso scompare se la **MQ** viene integrata con delle **variabili nascoste (VN)**. Nel caso **EPR**, esse corrisponderebbero alle posizioni e agli impulsi delle particelle → correlazioni tra particelle come quelle esibite da sistemi classici (guanti, gemelli omozigoti, ...), derivanti da comune origine → esistenza di variabili il cui valore è predeterminato.

EPR

Qualora fosse possibile misurare il valore di queste variabili nascoste si riuscirebbe a predire il risultato di un certo esperimento con certezza.

Nella MQ tali variabili sono inaccessibili all'osservazione.

La conclusione dell'articolo EPR è all'insegna dell'ottimismo

quantities.

Returning now to the general case contemplated in Eqs. (7) and (8), we assume that ψ_k and φ_r are indeed eigenfunctions of some non-commuting operators P and Q , corresponding to the eigenvalues p_k and q_r , respectively. Thus, by measuring either A or B we are in a position to predict with certainty, and without in any way

the second system in any way. No reasonable definition of reality could be expected to permit this.

While we have thus shown that the wave function does not provide a complete description of the physical reality, we left open the question of whether or not such a description exists. We believe, however, that such a theory is possible.

Bohr

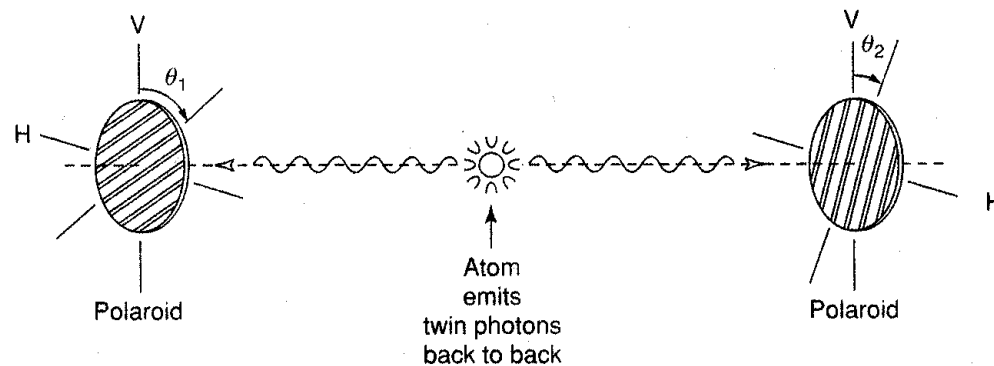
La risposta di Bohr è di difficile lettura.

Per gran parte del suo articolo, egli semplicemente ignora la configurazione sperimentale proposta da EPR e reitera la sua difesa vecchio stile della consistenza della MQ, in cui l'attacco di Einstein viene sventato invocando il disturbo sul sistema da parte dell'apparato di misura. Tali argomenti, però, sono adesso irrilevanti poiché l'apparato utilizzato per la prima particella non può in alcun modo disturbare fisicamente quello che misura la seconda.

Quando, alla fine, passa a considerare l'esperimento EPR, Bohr s'impegna a provare la consistenza della MQ, proprietà garantita dalla complementarità che impedisce l'esecuzione simultanea delle misure di posizione e impulso. Tutto ciò, però, è irrilevante in quanto EPR non pongono la questione della consistenza della MQ, ma della sua completezza.

EPR (Bohm)

versione di **Bohm** dell'esperimento **EPR**: sorgente che emette due fotoni in direzioni opposte



- i due polaroid in direzione **V** (**H**) → entrambi i fotoni passano
- un polaroid nella direzione **H** e l'altro nella direzione **V** → mai vediamo entrambi fotoni passare

si osservano solo coppie **VV** e **HH**, mai **VH** e **HV**

EPR (Bohm)

→ misura della polarizzazione di uno dei fotoni consente di misurare quella dell'altro; misure indipendenti → questo deve aver sempre avuto la polarizzazione appena rivelata.

Avremmo potuto di scegliere di effettuare la misura lungo qualsiasi asse → la stessa conclusione si applica sempre: il fotone che si muove verso sinistra presenta una polarizzazione definita lungo ogni asse, anche se noi siamo in grado di determinarla per un solo asse alla volta. Ruolo dei due fotoni può essere scambiato: **ciascun fotone ha una polarizzazione definita lungo qualsiasi asse.**

MQ dimostra che le particelle acquisiscono in modo casuale una data proprietà quando eseguiamo una misura, ma **tale casualità può avere delle correlazioni spaziali.** Coppie di particelle adeguatamente preparate (**entangled**) non acquisiscono le proprietà in modo indipendente: **“dadi” che, lanciati in due luoghi diversi, segnano punteggi casuali ma identici.**

Entanglement

Particelle **entangled**, anche se spazialmente distanti, non si comportano autonomamente l'una dall'altra. Misurare la polarizzazione di uno dei due fotoni “obbliga” l'altro, eventualmente lontano anni-luce, ad abbandonare il limbo probabilistico e assumere la stessa polarizzazione.

Nella versione di **Bohm** dell'esperimento ciascun fotone viene creato in una sovrapposizione di stati di **H** e **V**. Misura polarizzazione del fotone di destra: **H** → collasso della sua f.d'o. nell'intero spazio: azzeramento, all'istante, dell'alternativa **V**. Dato che il collasso avviene ovunque, interessa anche il punto in cui si trova il fotone che si muove verso sinistra: si azzerava la componente **V** della sua f.d'o. → malgrado la distanza tra i due fotoni, la f.d'o. del fotone che si muove verso sinistra risente istantaneamente di qualsiasi cambiamento nella f.d'o. di quello che si muove verso destra.

Secondo la **MQ**, dunque, questa variazione istantanea della f.d'o. causa un'influenza che si trasmette a velocità superiore a quella della luce.

Collasso quantistico

L'ipotesi del collasso si è rivelata molto utile per giustificare i risultati sperimentali, ma è impossibile da dedurre dall'apparato matematico della MQ: deve essere introdotto come ipotesi aggiuntiva.

Questa strategia solleva non pochi dubbi. Infatti, com'è possibile che quando eseguiamo una misura su un elettrone in DAFNE ne azzeriamo istantaneamente la f. d'o. sulla Luna? Certamente quando troviamo l'elettrone in DAFNE sappiamo che questo non può trovarsi sulla Luna, ma con quali meccanismi ciò avviene? In che modo la parte della f. d'o. che si trova sulla Luna “apprende” che deve azzerarsi all'istante.

Com'è possibile che il collasso avvenga istantaneamente? Non è un'idea in conflitto con la RS? Se le f. d'o. fossero come le onde d'acqua, la risposta sarebbe indubbiamente positiva. Ma - obiettano da Copenhagen - le f. d'o. non sono come onde d'acqua.

Collasso quantistico

Anche se descrive la materia, la f.d'o. non è un'entità materiale e, quindi, la barriera imposta dalla velocità della luce non agisce. Se la f.d'o. collassa in DAFNE, osservatore sulla Luna non riuscirà (con probabilità 1) a rivelare l'elettrone. Niente sulla Luna indica la variazione improvvisa della f. d'o. associata con la rivelazione dell'elettrone in DAFNE. Fintanto che l'elettrone non si sposterà con velocità maggiore di quella della luce, non si avrà alcun conflitto con la RS.

La RS vieta propagazione informazione con $v > c$. Quando si misura la polarizzazione dei due fotoni, tra questi non viene scambiata alcuna informazione. Per ogni fotone che giunge al polaroid c'è un'uguale probabilità che esso lo passi o meno → ottengo due sequenze di 0/1. Non è assolutamente possibile prevedere l'esito di una misura; in queste due serie casuali di dati non è nascosta alcuna informazione di sorta, ma sono identiche e di ciò ce ne accorgiamo solo confrontandole, cosa che può essere fatto solo con mezzi convenzionali (telefono, fax, e-mail, ...), più lenti della luce.

EPR vs RS

Quindi, sebbene sembra che la misura della polarizzazione di un fotone influenzi all'istante quella dell'altro, nessuna informazione viene scambiata tra i due: **la RS è salva**.

Si tratta di un argomento soddisfacente?

Per molti, sì. Altri, invece, hanno la sensazione che ci sia ben altro sotto. Resta il fatto che due particelle distinte, soggette alla casualità della **MQ**, si mantengono in un certo qual modo in contatto, legate tra loro, tanto che qualsiasi cosa faccia la prima, la seconda la imita. Ciò sembra la prova lampante che qualcosa più veloce della luce è in grado di agire tra loro.

Chi ha ragione? Non esiste consenso sulla risposta.

Secondo alcuni fisici e filosofi occorre rivedere l'intero dibattito, finora basato – dicono – su presupposti sbagliati.

EPR vs RS

Secondo alcuni il vero cuore della questione non è tanto che la luce imponga un limite alla velocità, quanto il secondo postulato della RS, i.e., che la velocità della luce sia qualcosa su cui tutti gli osservatori, indipendentemente dal loro stato di moto, concordano.

Essi sottolineano che, al momento, non c'è consenso unanime sul fatto che realmente disponiamo di una descrizione pienamente convincente del processo di misura che sia invariante per trasformazioni di Lorentz.

Secondo questa linea di pensiero, nel momento in cui si riuscisse a elaborare questa descrizione, sparirebbe qualunque conflitto con la RS.

Bell

Nel 1965 Bell studia le correlazioni originate da condizioni classiche predeterminate (come nel caso dei guanti e dei gemelli omozigoti) e stabilisce una disuguaglianza che è violata dalla MQ

Ancora esperimento EPR (nella versione di Bohm), ma con polaroid con asse principale inclinato rispetto alla verticale → risultato dipende dagli angoli θ_1 e θ_2 d'inclinazione degli assi dei due polaroid

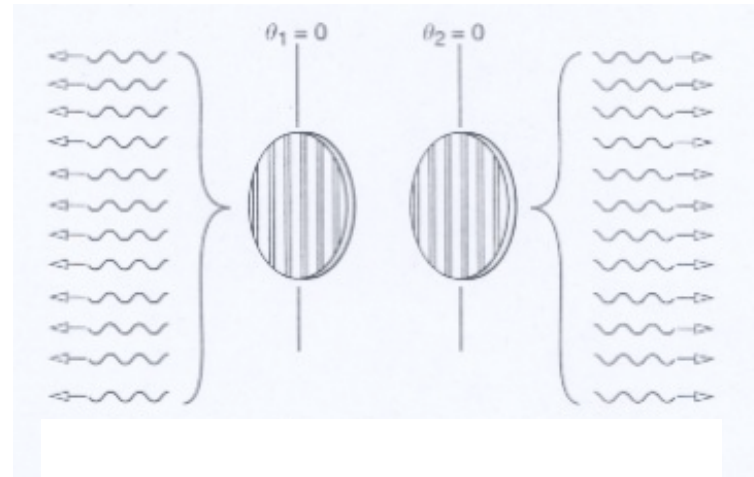
Variabile caratteristica dell'esperimento: numero di coppie di fotoni in disaccordo (un fotone passa e uno no), che studiamo come funzione di θ_1 e θ_2

$$N(\theta_1, \theta_2)$$

Bell

✓ $\theta_1 = \theta_2 = 0$

→ $N(0,0) = 0$



✓ ruotiamo uno o entrambi i polaroid → ipotesi:

- eventi in un polaroid non influenzano eventi nell'altro;
- esistenza correlazione classica: fotoni emessi dalla sorgente con polarizzazioni // (ipotesi delle VN di Einstein);
- il fotone segue la MQ, i.e., passa o viene assorbito da un generico polaroid con una certa probabilità.

Bell

12 coppie di fotoni con polarizzazione **VV**; $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 30$

- numero di fotoni che passano polaroid 2 (P_2):

$$(\cos 30)^2 \times 12 = \frac{3}{4} \times 12 = 9$$

- tutti i fotoni che giungono su polaroid 1 (P_1) lo passano

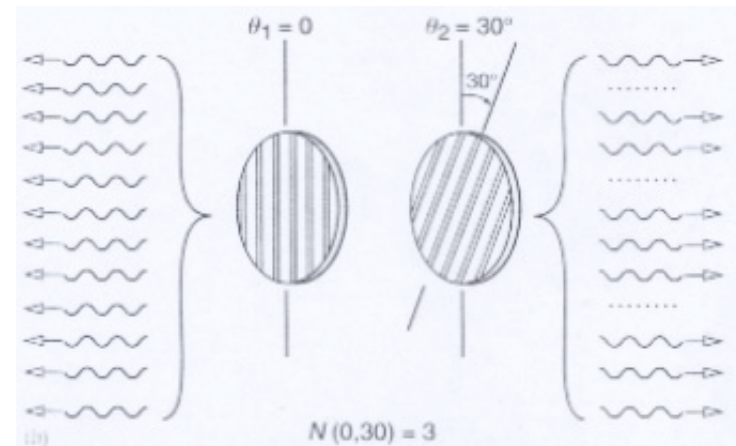
→ **numero dei disaccordi = 3**

i.e.

$$N(0, 30) = (\sin 30)^2 \times 12$$

NB – situazione identica se $\theta_1 = -30$ e $\theta_2 = 0$

→ **$N(-30, 0) = 3$**



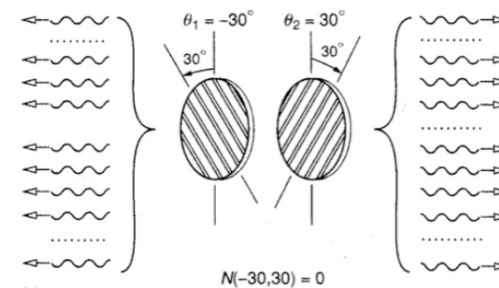
Bell

P_1 e P_2 ruotati: $\theta_1 = -30^\circ$ e $\theta_2 = 30^\circ \rightarrow$ P_2 ferma ancora 3 fotoni e lo stesso fa P_1 ; assorbimento statistico $\rightarrow$ fotoni possono appartenere alla stessa coppia oppure a coppie diverse

- ✓ fotoni appartengono alla stessa coppia

$\rightarrow$

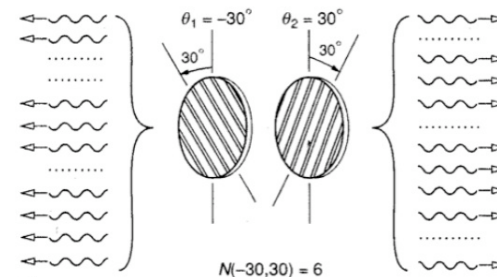
$$N = 0$$



- ✓ fotoni appartengono a coppia diversa

$\rightarrow$

$$N = 6$$



Bell

Esistenza di situazioni intermedie: alcuni fotoni assorbiti appartengono alla stessa coppia, altri no → **numero disaccordi** compreso tra gli estremi 0 e 6, i.e., risulta:

$$N(-30, 30) \leq N(-30, 0) + N(0, 30)$$

disuguaglianza di Bell

Domanda: Qual è la predizione della MQ?

Nel caso considerato, la MQ non predetermina la direzione di polarizzazione, per cui ciò che conta è l'angolo di un polaroid rispetto all'altro, i.e., $\theta = 60$ e, quindi:

$$N(-30, 30) = (\sin 60)^2 \times 12 = \frac{3}{4} \times 12 = 9$$

Bell

Con argomenti analoghi, abbiamo:

$$N(-30, 0) = N(0, 30) = (\sin 30)^2 \times 12 = \frac{1}{4} \times 12 = 3$$

i.e.
$$N(-30, 0) + N(0, 30) = 6$$

$$\rightarrow N(-30, 0) + N(0, 30) < N(-30, 30)$$

MQ viola disuguaglianza di Bell

Osservazioni sperimentali, eseguite tra la fine degli anni '70 e l'inizio degli anni '80 dal gruppo di Aspect, in accordo con la MQ $\rightarrow$ conferma della violazione della disuguaglianza di Bell

Bell

Anche se questi esperimenti non riproducevano perfettamente tutte le condizioni dell'esperimento EPR – i polaroid hanno efficienza di rivelazione < 1 –, tutti concordano nel ritenere che la MQ abbia superato la prova dei fatti

nessuna teoria a “variabili nascoste” (senza esplicita o implicita “azione a distanza”) può riprodurre i risultati sperimentali

Einstein avrebbe certamente preferito una teoria a variabili nascoste per il mondo microscopico, ma si sarebbe certamente rifiutato di accettare l'esistenza di una “spettrale” azione a distanza

... la realtà è ben strana cosa

Conclusioni

Gli esperimenti di Aspect dimostrano che un'azione svolta in un certo luogo può, in certe condizioni, essere correlata a un evento che si svolge a distanza senza che ci sia contatto tra questi due luoghi. Sebbene sconcertante ([Einstein](#) lo definì sovranaturale), il fenomeno è coerente con le leggi della [MQ](#) e, infatti, fu previsto teoricamente ben prima dell'avvento delle tecnologie necessarie per verificarlo sperimentalmente.

Teoria ed esperimento corroborano la conclusione che [l'universo ammette l'esistenza di interconnessioni non-locali](#): qualcosa che accade qui può essere correlato con qualcosa che accade laggiù, anche se non c'è nulla che si sposti da qui a lì, anche se non c'è abbastanza tempo perché la luce si propaghi tra i due punti.

Conclusioni

→ **spazio non può più essere concepito come in passato:**

qualunque sia la distanza interposta, essa non garantisce che i due corpi siano distinti, dato che per la MQ tra i due potrebbe esserci una sorta di legame.

Secondo la MQ, la connessione può permanere anche se le due particelle si trovano agli estremi opposti dell'universo. Dal punto di vista della loro correlazione è come se fossero l'una accanto all'altra: **lo spazio tra loro non conta.**

Correlazioni di natura diversa da quelle classiche → “guanti quantistici”: guanti che scelgono casualmente se essere destro o sinistro e, nonostante ciò, lavorano in coppia: se uno sceglie di essere destro, l'altro è immancabilmente sinistro.

Bibliografia

molti mondi
approccio storico

1. A. Zeilinger, *Il velo di Einstein* (Einaudi, 2005)
2. R. Newton, *La Fisica dei Quanti sfida la Realtà* (Dedalo 2009)
3. M. Kumar, *Quantum* (Mondadori - 2011)
4. G. Ghirardi, *Un'occhiata alle carte di Dio* (Saggiatore, 1997)
5. D. Deutsch, *La trama della realtà* (Einaudi, 1997)
6. A. Aczel, *Entanglement* (Cortina Raffaello, 2004)
7. C. Bruce, *I conigli di Schrödinger* (Cortina Raffaello, 2006)

... e, dulcis in fundo

L. Susskind – *Meccanica Quantistica* (Cortina Raffaello, 2015)