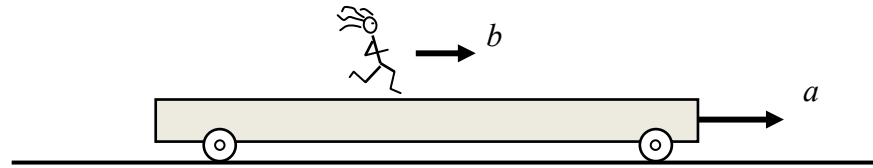


Composizione delle velocità

Mi muovo con velocità b su treno che si muove con velocità a rispetto al suolo → con quale velocità mi muovo rispetto al suolo?



Galileo: $a \oplus b = a + b$

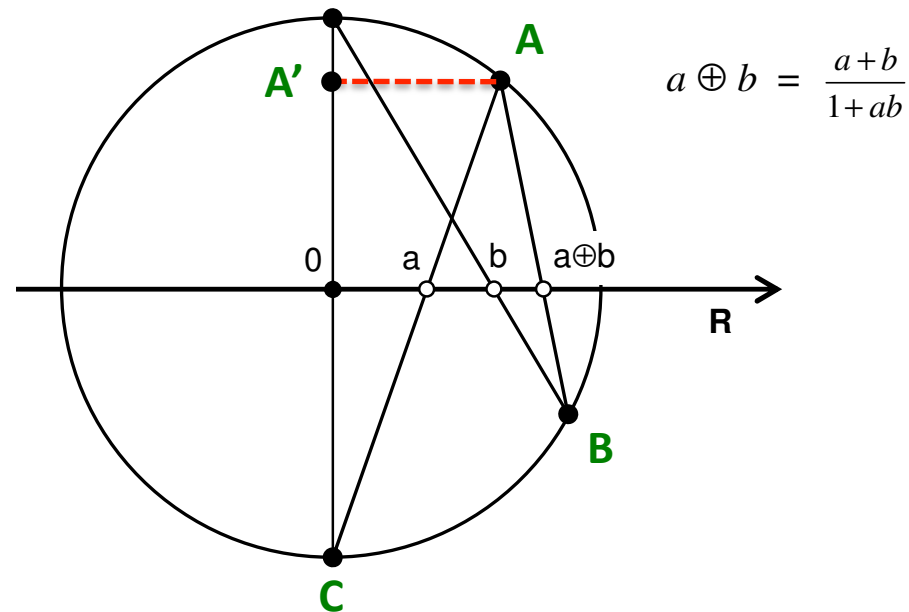
Einstein: $a \oplus b = \frac{a + b}{1 + a \cdot b}$

- non posso muovermi più velocemente della luce $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = \frac{(1/2) + (1/2)}{1 + (1/2) \cdot (1/2)} = \frac{4}{5} < 1$
- anche se vado davvero veloce $\frac{4}{5} \oplus \frac{5}{6} = \frac{(4/5) + (5/6)}{1 + (4/5) \cdot (5/6)} = \frac{49}{50} < 1$
- o sparo un fascio di luce mentre mi muovo $v \oplus (\pm 1) = \frac{v \pm 1}{1 + v \cdot (\pm 1)} = \pm 1$

la composizione estrema $1 \oplus 1 = \frac{1 + 1}{1 + 1 \cdot 1} = 1$

Composizione delle velocità

circonferenza di raggio unitario nel piano cartesiano: velocità da comporre (< 1)
come punti sull'asse delle ascisse \rightarrow individuo punti sulla circonferenza che
risultano dalle intersezioni della retta passante per $(0, -1)$ ed a e quella per $(0, 1)$ e b

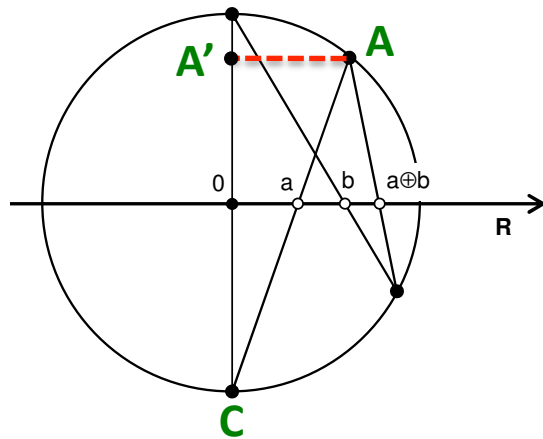


Teorema: l'intersezione della retta AB con l'asse delle ascisse rappresenta
la composizione relativistica $a \oplus b$

Composizione delle velocità

1. coordinate del punto **A**

A' \equiv proiezione di **A** sull'asse delle ordinate: triangoli **AA'C** e **aOC** sono simili \rightarrow



$$\frac{a}{1} = \frac{x}{1+y} \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{x^2}{(1+y)^2}$$

A \in alla circonferenza unitaria $\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{1 - y^2}{(1 + y)^2}$

i.e. $a^2 = \frac{(1 - y)(1 + y)}{(1 + y)^2} = \frac{1 - y}{1 + y} \quad \rightarrow \quad y = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$

Composizione delle velocità

che inserita nella ★ fornisce:

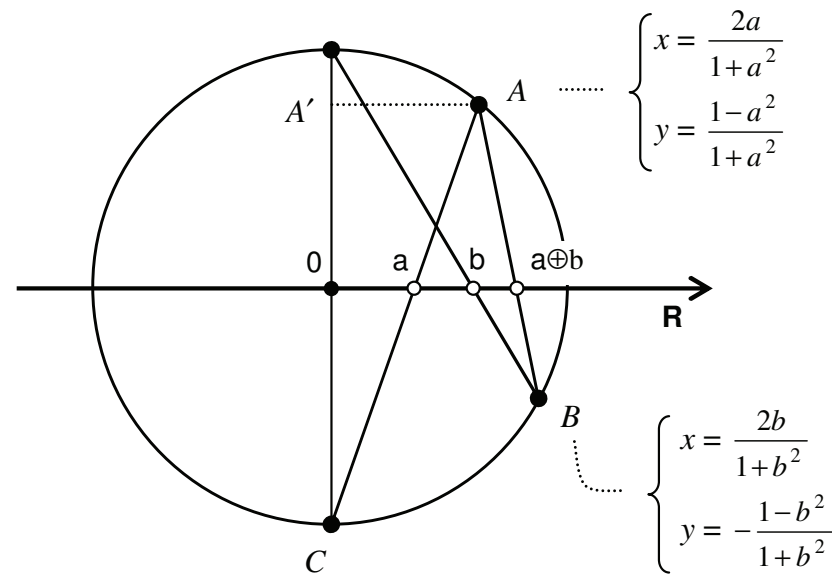
$$x = a \left(1 + \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \right) = \frac{2a}{1 + a^2}$$

2. coordinate del punto **B**

per simmetria, scambiando a con b e cambiando segno all'ordinata:

$$x = \frac{2b}{1 + b^2}$$

$$y = -\frac{1 - b^2}{1 + b^2}$$



Composizione delle velocità

Retta passante per i punti **A** e **B**

$$1) \quad m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 + ab}{a - b}$$

$$2) \quad q = y_A - m x_A \quad \rightarrow \quad q = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} - \frac{1 + ab}{a - b} \frac{2a}{1 + a^2}$$

$$\text{i.e.} \quad q = -\frac{a + b}{a - b}$$

$$\text{NB- } b > a \quad \rightarrow \quad m < 0, q > 0$$

$$y = \frac{1 + ab}{a - b} x - \frac{a + b}{a - b} \quad \rightarrow \quad (1 + ab)x + (b - a)y = a + b$$

intersezione con l'ascissa: $y = 0$

\rightarrow

$$x = \frac{a + b}{1 + ab}$$

q.e.d.