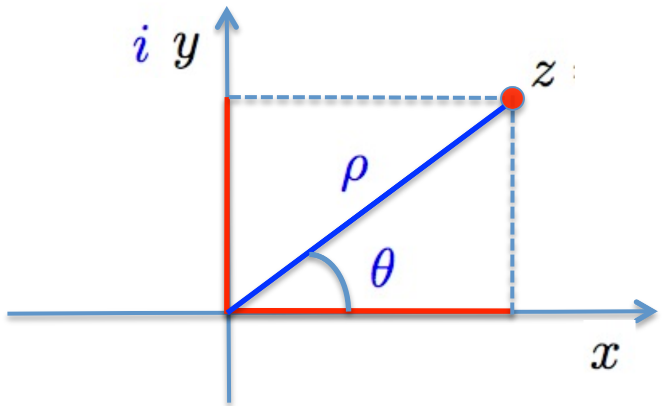
Numeri Complessi

$$x, y \in \mathbb{R} \quad \rightarrow \quad z \in \mathbb{C}$$

$$z = x + i\,y$$

$$(i = \sqrt{-1}\,)$$



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \begin{cases} \arctan(y/x) & (x > 0) \\ \pi + \arctan(y/x) & (x < 0) \end{cases} \qquad \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$$

$$\boxed{z = \rho\ (\cos\theta + i\ \sin\theta)}$$

NB – per semplicità, nel seguito considero solo il caso $\rho = 1$

Giusto chiamarli numeri? Sì perché formano un campo: insieme di oggetti per cui sono definite due operazioni + e x che soddisfano i seguenti assiomi

1. + e x commutative e associative ($a + b = b + a$, $a \times b = b \times a$);
2. x distributiva rispetto alla somma ($a \times [b \times c] = [a \times b] + [a \times c]$);
3. $\exists\, 0 \mid \forall a$ risulta $a + 0 = a$ (*esistenza elemento neutro rispetto a +*);
4. $\exists\, 1 \mid \forall a$ risulta $a \times 1 = a$ (*esistenza elemento neutro rispetto a x*);
5. $\forall a,\ \exists\, b \mid a + b = 0$ (*esistenza inverso rispetto a +*);
6. $\forall (a, b, c)$, se $c \neq 0$ e $c \times a = c \times b \;\rightarrow\; a = b$ (*legge di cancellazione*);
7. $\forall a \neq 0\ \exists\, b \mid a \times b = 1$ (*esistenza inverso rispetto a x*);

NB - 1) – 5) = anello; 1) – 6) = dominio d'integrità; 7) consente la divisione
→ campo = dominio d'integrità in cui è possibile la divisione

campo → aritmetica

Aritmetica dei numeri complessi

i. $$(a_1 + i\, b_1) + (a_2 + i\, b_2) = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$$

ii. $$(a_1 + i\, b_1)\,(a_2 + i\, b_2) = (a_1\, a_2 - b_1\, b_2) + i\,(r_1\, b_2 + b_1\, a_2)$$

iii. $$\frac{a_1 + i\, b_1}{a_2 + i\, b_2} = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2}\,[(a_1\, a_2 + b_1\, b_2) + i\,(b_1\, a_2 - a_1\, b_2)]$$

Campo dei numeri complessi gode di proprietà importantissima: ogni equazione polinomiale può essere risolta

$\forall (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n) \in \mathbb{C},\ \exists x \in \mathbb{C}$ soluzione dell'equazione:

$$c_n\, x^n + c_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + c_1\, x + c_0 = 0$$

teorema fondamentale dell'algebra

importante proprietà del numero $\boxed{e(\theta) = \cos\theta + i\,\sin\theta}$

$$e(\theta)\,e(\psi) = (\cos\theta + i\,\sin\theta)\,(\cos\psi + i\,\sin\psi)$$
$$= (\cos\theta\,\cos\psi - \sin\theta\,\sin\psi) + i\,(\cos\theta\,\sin\psi + \sin\theta\,\cos\psi)$$
$$= \cos(\theta + \psi) + i\,\sin(\theta + \psi)$$

i.e. $\boxed{e(\theta)\,e(\psi) = e(\theta + \psi)}$

Teorema: *l'unica funzione reale non nulla e differenziabile che soddisfa la condizione*

$$f(x)\,f(y) = f(x + y) \qquad (1)$$

per le due variabili indipendenti x e y è la funzione esponenziale

$f(u) = \mathrm{e}^{c\,u}$ *con c costante arbitraria*

Dim. - Derivata parziale di ambo i membri della (1) rispetto alla variabile *x*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} f(y) = \frac{\partial f(x+y)}{\partial x} \qquad (2)$$

$$w = x + y \qquad \to \qquad \frac{\partial f(x+y)}{\partial x} = \frac{\mathrm{d} f(w)}{\mathrm{d} w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$\frac{\partial w}{\partial x} = 1 \qquad \to$ la (2) può essere riscritta come:

$$\frac{\mathrm{d} f(x)}{\mathrm{d} x} f(y) = \frac{\mathrm{d} f(w)}{\mathrm{d} w} \qquad (3)$$

Ripetendo gli stessi passi per la derivata rispetto ad *y* della (1), si ottiene:

$$f(x) \frac{\mathrm{d} f(y)}{\mathrm{d} y} = \frac{\mathrm{d} f(w)}{\mathrm{d} w} \qquad (3')$$

i.e., poiché i membri di destra di (3) e (3') coincidono:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\, f(y) = f(x)\, \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{f(x)}\,\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f(y)}\,\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y} \qquad (3'')$$

(3''): uguaglianza di due funzioni di variabile diversa → uguaglianza possibile solo se ciascun membro è una costante, i.e.

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = c\,\mathrm{d}u \qquad (u = x, y)$$

$$\Longrightarrow \qquad f(u) = A\,\mathrm{e}^{c\,u}$$

che sostituita nella (1), fornisce $A^2 = A$, i.e., $A = 1$ c.v.d.

Quindi, tornando al nostro problema iniziale: $e(\theta) = \mathrm{e}^{c\theta}$

$$\frac{\mathrm{d}e(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = c\,e(\theta) \quad \to \quad i\,e(\theta) = c\,e(\theta)$$

$$\to \quad c = i \quad \to \quad \boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta} \qquad (4)$$

(Eulero)

NB - $(\theta \to -\theta) \equiv (i \to -i) \quad \to \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\sin\theta$

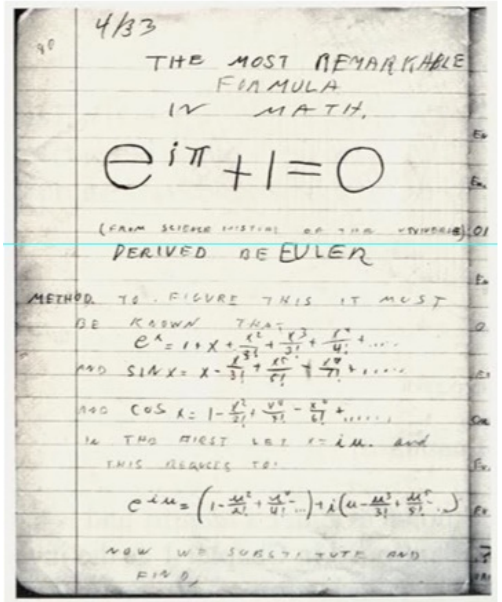
$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\,\cos\theta$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\,\sin\theta$$

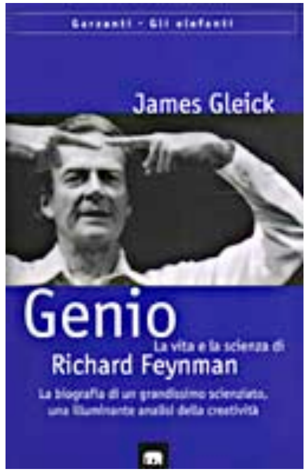
$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} \qquad (4')$$

tutta la (noiosa) trigonometria si riduce a manipolare esponenziali con argomento immaginario.

$$\boxed{\theta = \pi} \qquad \longrightarrow \qquad e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\,\sin(\pi) = -1 \qquad (5)$$



quaderno di appunti di Feynman (a 15 anni)



eseguendo il logaritmo di ambo i membri della (5), si ottiene:

$$\boxed{i\,\pi = \ln(-1)}$$

chi ha detto che il logaritmo di un numero negativo non esiste?

$$\boxed{\theta = \pi/2} \longrightarrow e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\,\sin(\pi/2) = i \qquad (6)$$

$$\longrightarrow \ln i = i\,\frac{\pi}{2} \longrightarrow \boxed{\pi = \frac{2}{i}\,\ln i}$$

elevando all'unità immaginaria la (6), si ha:

$$(e^{i\pi/2})^i = i^i \longrightarrow \boxed{i^i = e^{-\pi/2}} = 0.2078\,7957\,63\ldots$$

N.B. - facciamo il quadrato della relazione di Eulero:

$$e^{i\pi} = -1 \rightarrow e^{i2\pi} = 1 \longrightarrow \ln\left(e^{i2\pi}\right) = \ln(1)$$

i.e. $\quad i\,2\pi\,\ln e = 0 \rightarrow \boxed{i\,2\pi = 0}$

dove abbiamo sbagliato?

incredibile, ma vero, abbiamo definito male il numero 1!

Nel campo complesso, dobbiamo scrivere:

$$1 = e^{i\,2\,\pi\,n} \qquad\qquad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\longrightarrow \qquad \boxed{\ln(1) = i\,2\,\pi\,n}$$

la smettiamo di dire che il logaritmo di 1 è uguale a 0?

in realtà, $\ln(1)$ è un numero complesso con parte reale nulla

$$\Re\,[\,\ln(1)\,] = 0$$

$$\Im\,[\,\ln(1)\,] = 2\,\pi\,n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Quando siamo nel campo complesso dobbiamo sempre porre attenzione al problema dei valori multipli, se non vogliamo incorrere in assurdità.

Ad esempio:

$$i^{\,i} = \left[e^{\,i\,(\pi/2+2\,\pi\,n)}\right]^{\,i} \qquad\qquad (n \in \mathbb{Z})$$

$$= e^{\,-(\pi/2+2\,\pi\,n)} = e^{\,-(1/2+2\,n)\,\pi}$$

i.e.,

$$n = 1 \quad \rightarrow \quad e^{\,-\,5\pi/2} = 3.882\ \times\ 10^{\,-4}$$

$$n = 2 \quad \rightarrow \quad e^{\,-\,9\pi/2} = 7.2495\ \times\ 10^{\,-7}$$

$$n = -1 \quad \rightarrow \quad e^{\,3\pi/2} = 111.3178$$

NB - $\mathrm{e}^{\,-\pi/2}\ (n=0)$ a pagina 9 è detto valore principale

$$\boxed{\theta = x + i\,y} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} e^{i\theta} &= e^{i(x+iy)} = e^{-y}\,e^{ix} = e^{-y}\,(\cos x + i\,\sin x) \\ e^{-i\theta} &= e^{-i(x+iy)} = e^{y}\,e^{-ix} = e^{y}\,(\cos x - i\,\sin x) \end{aligned}$$

(4')

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}\left\{e^{-y}\,(\cos x + i\,\sin x) + e^{y}\,(\cos x - i\,\sin x)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\cos x\,(e^{y} + e^{-y}) - i\,\sin x\,(e^{y} - e^{-y})\right\} \\ &= \cos x\,\cosh y - i\,\sin x\,\sinh y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{1}{2i}\left\{e^{-y}\,(\cos x + i\,\sin x) - e^{y}\,(\cos x - i\,\sin x)\right\} \\ &= \frac{1}{2i}\left\{-\cos x\,(e^{y} - e^{-y}) + i\,\sin x\,(e^{y} + e^{-y})\right\} \\ &= \sin x\,\cosh y + i\,\cos x\,\sinh y \end{aligned}$$

$$x = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\cos(i\,y) = \cosh y \qquad \sin(i\,y) = i\,\sinh y}$$

funzioni iperboliche = funzioni trigonometriche con argomento immaginario

La funzione esponenziale

Nelle applicazioni si osservano numerosi fenomeni in cui il tasso di variazione di certe grandezze è proporzionale al valore della grandezza stessa. Questo significa che il processo è governato da un'equazione del tipo:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \alpha\, f(x)$$

Soluzione: $$f(x) = C\, e^{\alpha\, x}$$

dove la costante moltiplicativa è determinata dalla condizione iniziale del processo: $C = f(0)$

1. *<u>decadimento di un nucleo radioattivo</u>*

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\alpha\, N \qquad \to \qquad N(t) = N(0)\, e^{-t/\tau}$$

$\tau = 1/\alpha$ è la vita media del nucleo: $N(\tau) = N(0)/e$

2. *raffreddamento degli oggetti*

oggetto a temperatura T_0 posto in una riserva di calore a temperatura T_1 (< T_0); ipotesi: T_1 rimane costante durante il processo

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\alpha\,(T - T_1) \qquad \rightarrow \qquad T = T_1 + (T_0 - T_1)\, e^{-\alpha\, t}$$

(legge del raffreddamento di Newton)

3. *crescita di popolazione* segue legge (approssimativamente) esponenziale

$$P(t) = C\, e^{\alpha\, t}$$

N.B. – integrando:

$$C \int_{-\infty}^{T} \mathrm{d}t\, e^{\alpha\, t} = \frac{C}{\alpha}\, e^{\alpha\, t}\Big|_{-\infty}^{T} = \frac{C}{\alpha}\left(e^{\alpha\, T} - e^{\alpha\,(-\infty)}\right) = C\,\frac{e^{\alpha\, T}}{\alpha} = \frac{P(T)}{\alpha}$$

$\alpha > 0 \quad \longrightarrow$ n. viventi attuale > n. esseri umani esistiti finora!!

Matematica dell'Interferenza

Nel calcolo del pattern d'interferenza associato alle due fenditure ho necessità della identità trigonometrica

$$\cos\theta + \cos\psi = 2\,\cos\left(\frac{\theta+\psi}{2}\right)\,\cos\left(\frac{\theta-\psi}{2}\right)$$

Il calcolo può eseguito anche utilizzando la formula di Eulero. Ciascuna onda è rappresentata come un numero complesso, la sua parte reale essendo la vera quantità fisica

$$A = A_1\,e^{i\,(\omega\,t+\theta)} + A_2\,e^{i\,(\omega\,t+\psi)} = \left(A_1\,e^{i\,\theta} + A_2\,e^{i\,\psi}\right)\,e^{i\,\omega\,t} \qquad (\omega = 2\,\pi\nu)$$

per cui:

$$\begin{aligned} |\,A\,|^2 &= \left(A_1\,e^{i\,\theta} + A_2\,e^{i\,\psi}\right)\,e^{i\,\omega\,t}\,\left(A_1\,e^{-i\,\theta} + A_2\,e^{-i\,\psi}\right)\,e^{-i\,\omega\,t} \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1\,A_2\,e^{i\,(\theta-\psi)} + A_1\,A_2\,e^{-i\,(\theta-\psi)} \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1\,A_2\,\cos(\theta-\psi) \end{aligned}$$

Il vantaggio nell'uso della formula di Eulero diviene evidente quando devo fare la somma di tante onde. Ad esempio, supponiamo di dover sommare le onde emesse da N sorgenti di uguale frequenza (ν) e ampiezza (A), sfasate tra loro di una fase costante ϕ

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= A\left[e^{i\omega t} + e^{\,i(\omega t+\phi)} + e^{\,i(\omega t+2\phi)} + \ldots + e^{\,i(\omega t+(N-1)\phi)}\right] \\ &= A\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(\omega t+k\phi)} = A\,e^{i\omega t}\sum_{k=0}^{N-1} e^{ik\phi} \\ &= A\,e^{i\omega t}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{i\phi}\right)^k\end{aligned}$$

N.B – somma di progressione geometrica di ragione q

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} q^k = 1 + q + q^2 + \ \ldots\ q^{N-2} + q^{N-1}$$

$$\longrightarrow \qquad q\,S_N = q + q^2 + \ \ldots\ q^{N-1} + q^N = S_N - 1 + q^N$$

$$\longrightarrow \qquad 1-q^N=(1-q)\,S_N \qquad \to \qquad \boxed{S_N=\frac{1-q^N}{1-q}}$$

Nel nostro caso:

$$q=e^{i\phi} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{i\phi}\right)^k=\frac{1-e^{iN\phi}}{1-e^{i\phi}}$$

per cui

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= A\,e^{i\omega t}\,\frac{1-e^{iN\phi}}{1-e^{i\phi}}\\
&= A\,e^{i\omega t}\,e^{iN\phi/2}\,\frac{e^{-iN\phi/2}-e^{iN\phi/2}}{e^{i\phi/2}\left(e^{-i\phi/2}-e^{i\phi/2}\right)}\\
&= A\,e^{i\omega t}\,e^{i(N-1)\phi/2}\,\frac{-2\,i\,\sin(N\,\phi/2)}{-2\,i\,\sin(\phi/2)}\\
&= A\,e^{i\omega t}\,e^{i(N-1)\phi/2}\,\frac{\sin(N\,\phi/2)}{\sin(\phi/2)}
\end{aligned}$$

$$\longrightarrow \qquad |\mathcal{A}|=A\,\frac{\sin(N\,\phi/2)}{\sin(\phi/2)}$$

NB -

- $$\lim_{\phi\to 0} |\mathcal{A}| = A \lim_{\phi\to 0} \frac{\sin(N\,\phi/2)}{\sin(\phi/2)} = A \lim_{\phi\to 0} \frac{(N\,\phi/2)\,\sin(N\,\phi/2)/(N\,\phi/2)}{(\phi/2)\,\sin(\phi/2)/(\phi/2)}$$

$$= A\,N \frac{\lim_{\phi\to 0} \dfrac{\sin(N\,\phi/2)}{N\,\phi/2}}{\lim_{\phi\to 0} \dfrac{\sin \phi/2}{\phi/2}} = A\,N$$

(e, più in generale, per $\phi = 2\,n\,\pi$)

- $|\mathcal{A}| = 0 \quad \rightarrow \quad \sin(N\,\phi/2) = 0 \quad \rightarrow \quad N\,\frac{\phi}{2} = n\,\pi \quad (n = 1, 2, \ldots)$

i.e. $$\phi = \frac{n}{N}\,2\,\pi$$

Per questi valori della fase la funzione consegue (ovviamente) i suoi valori minimi. E i massimi dove sono? Quanto vale la funzione in questi punti? (compito per casa)

Sviluppo in serie di Taylor

Rappresentazione di funzione arbitraria nell'intorno di un punto x_0 all'interno del suo campo di definizione → serie di potenze di Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}\bigg|_{x=x_0} (x - x_0)^k \qquad (k! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (k-1) \times k)$$

$$x_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}\bigg|_{x=0} x^k$$

$$f(x) = e^x \qquad \frac{\mathrm{d}^k(e^x)}{\mathrm{d}x^k} = e^x \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^k(e^x)}{\mathrm{d}x^k}\bigg|_{x=0} = 1$$

$$\Rightarrow \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad (7)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

NB - Se non credete a Taylor (era avvocato), potete seguire la dimostrazione (da fisico!) seguente. Partiamo dalla formula del binomio di Newton

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \ldots + \binom{n}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \quad \rightarrow \quad = 1 + n\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3 +$$

$$\ldots + \binom{n}{n}\left(\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!} = 1$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{(1-1/n)}{2!}x^2 + \frac{(1-1/n)(1-2/n)}{3!}x^3 +$$

$$\ldots + \frac{(1-1/n)(1-2/n)\ldots(1/n)}{n!}x^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$ i.e., la (7)

$$x = i\,\theta \qquad \rightarrow \qquad e^{i\,\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{\theta^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2\,k} \frac{\theta^{2\,k}}{(2\,k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{(2\,k+1)} \frac{\theta^{(2\,k+1)}}{(2\,k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (i^2)^k \frac{\theta^{2\,k}}{(2\,k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i\,(i^2)^k \frac{\theta^{(2\,k+1)}}{(2\,k+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2\,k}}{(2\,k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{(2\,k+1)}}{(2\,k+1)!}$$

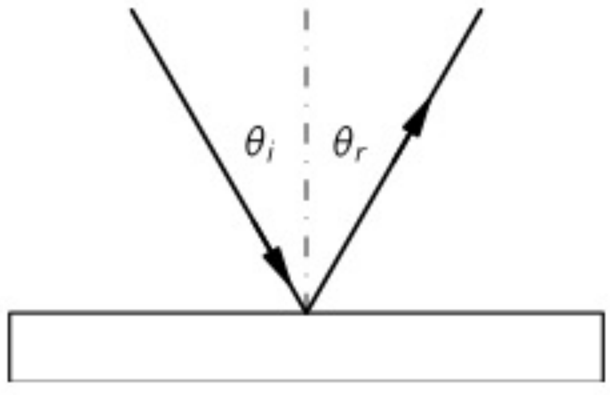
da cui, confrontando con la formula di Eulero, si ottiene:

$$\boxed{\cos\theta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2\,k}}{(2\,k)!} = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + \ldots}$$

$$\boxed{\sin\theta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2\,(k+1)}}{(2\,k+1)!} = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + \ldots}$$

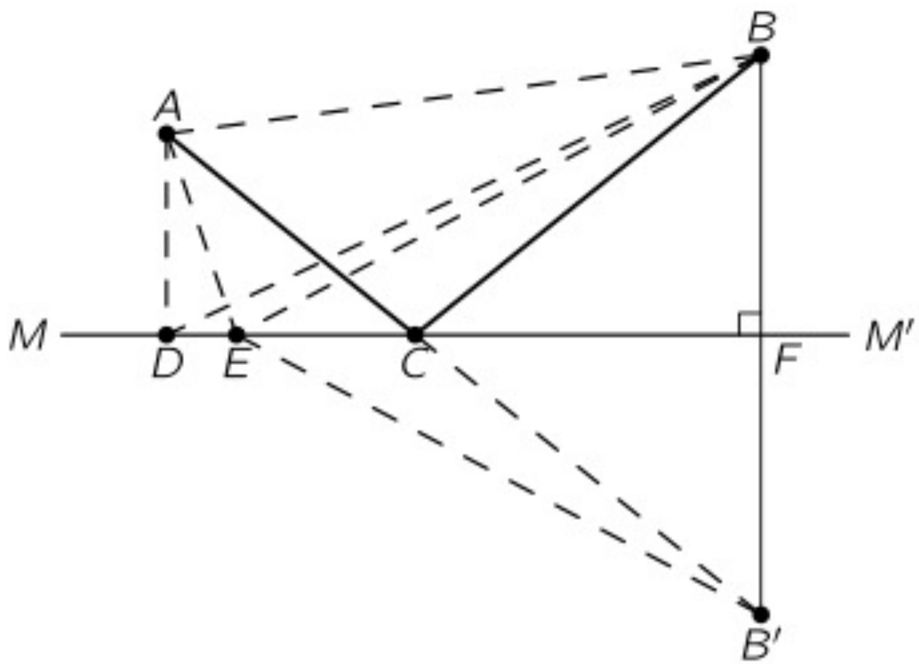
($\rightarrow$ per *piccoli angoli* il seno dell'angolo approssima l'angolo stesso)

Legge della riflessione



qual è la legge che determina questo comportamento?

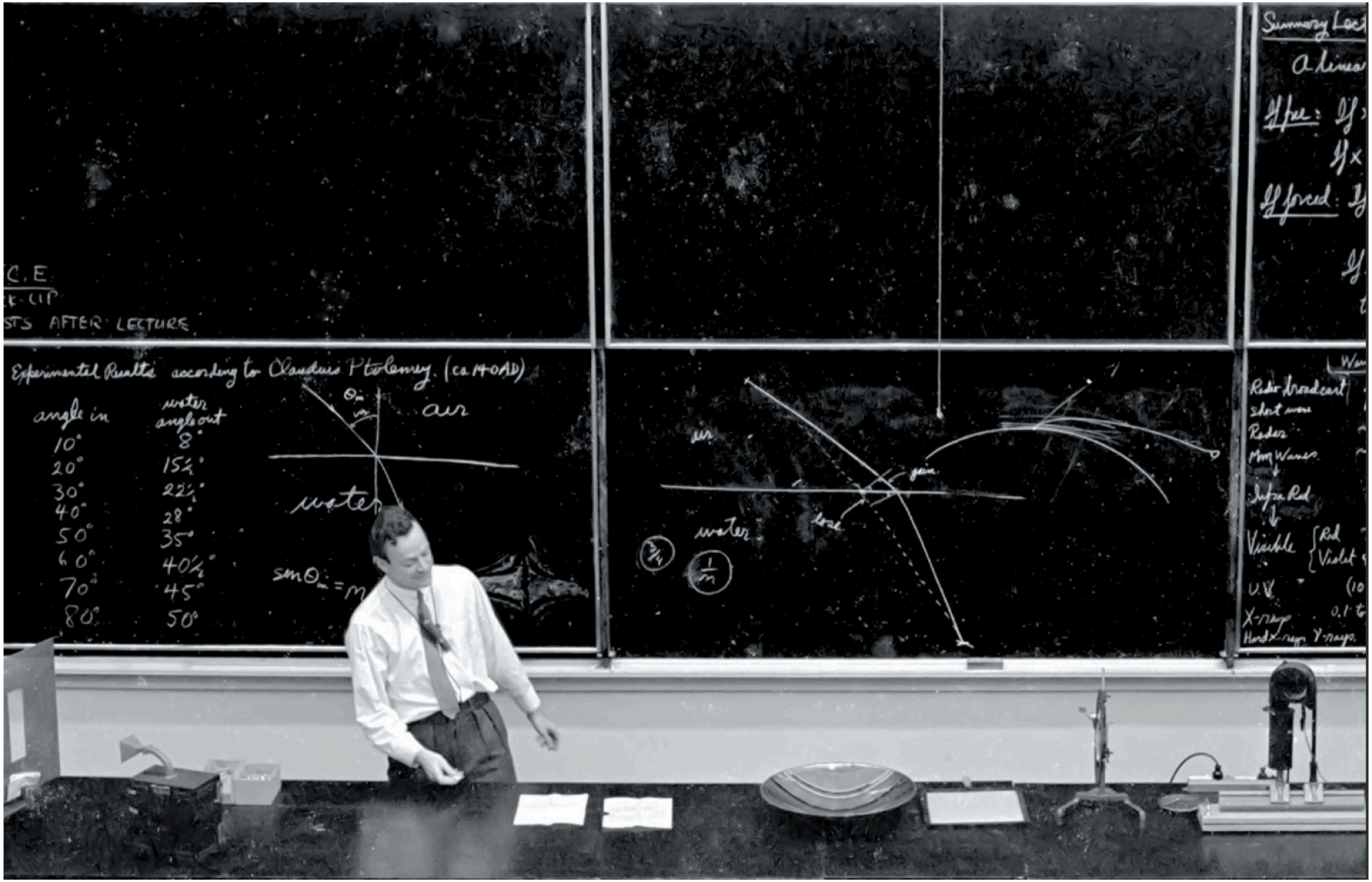
Principio del tempo minimo (Fermat): *di tutti i cammini possibili per andare da un punto a un altro, la luce segue quello che richiede il tempo di percorrenza più breve*



i cammini sono percorsi a velocità costante $\rightarrow$ il tempo minimo corrisponde alla distanza minima: percorso rettilineo che collega A con il punto immagine B’

ACB’ è una retta $\rightarrow$ $\widehat{ACD} = \widehat{B'CF} = \widehat{BCF}$ i.e. $\theta_i = \theta_r$

NB – Che la luce dovesse seguire il cammino di lunghezza minima l’aveva già detto Erone. Nella rifrazione, però, la luce non segue il percorso di minima lunghezza; ecco perché Fermat avanzò l’idea che fosse il tempo alla base del criterio di minimo


AFTER LECTURE
Experimental Results according to Claudius Ptolemy (ca 140 AD)
angle in
water angle out
10° 8°
20° 15½°
30° 22½°
40° 28°
50° 35°
60° 40½°
70° 45°
80° 50°
air
water
Summary Lect
Radar
Infra Red
Visible
Red
Violet
U.V.
X-rays
Hard X-rays γ-rays

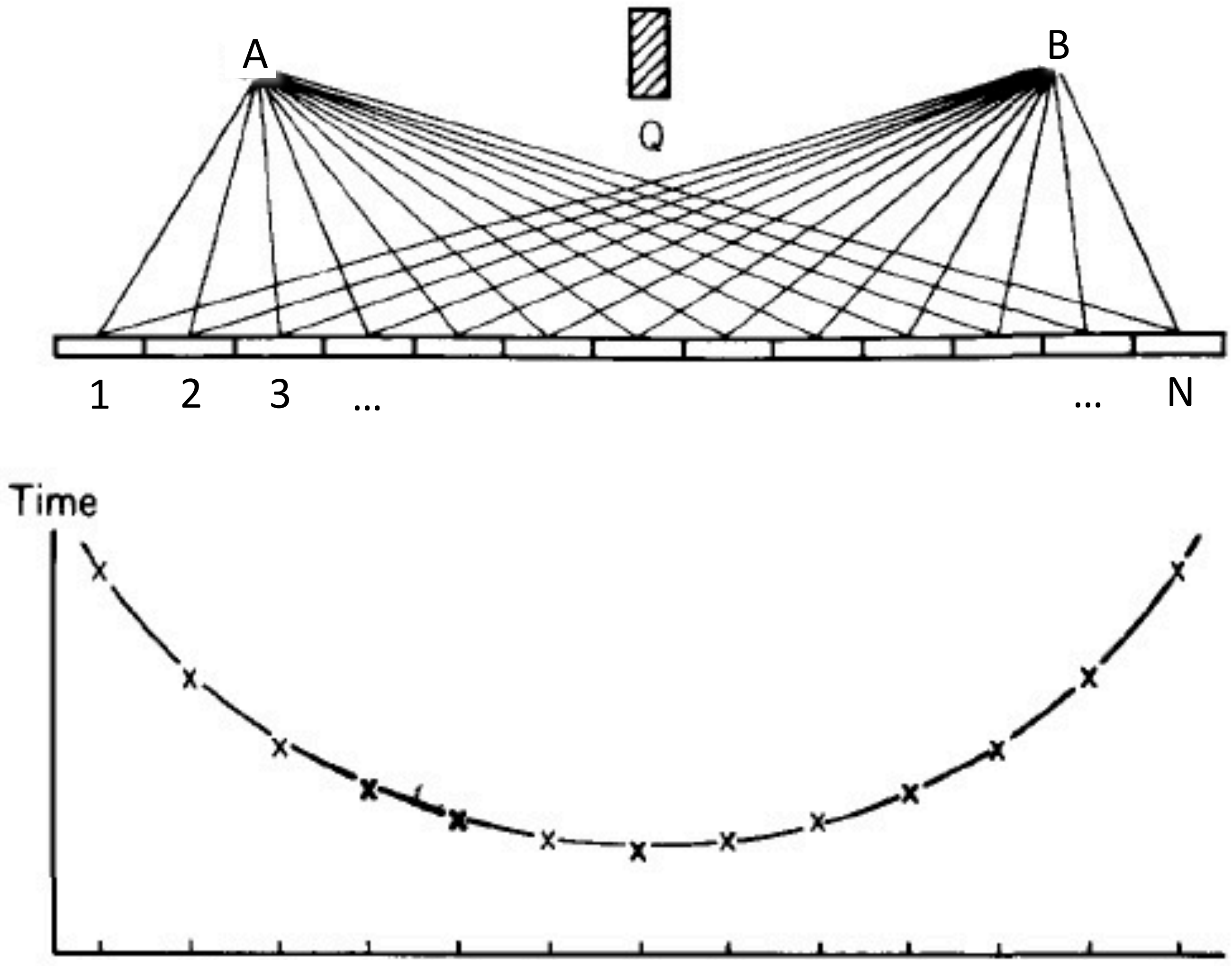
Che legge misteriosa! Invece di dire che la propagazione è causale (quando facciamo una cosa, ne accade un'altra), afferma questo: noi creiamo la situazione e la luce "calcola" il tempo più breve e "sceglie" il percorso di conseguenza. Ma come lo trova?

> "annusa" i percorsi! (Feynman) a questo serve la lunghezza d'onda: è, approssimativamente, la distanza su cui la luce "annusa" il percorso per controllarlo

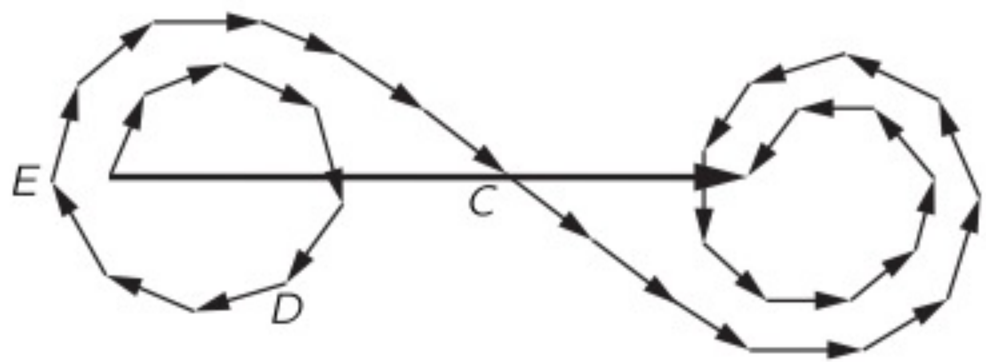
L'intensità luminosa nel punto B è proporzionale al numero medio di fotoni che arrivano per secondo $\rightarrow$ dobbiamo calcolare la probabilità che un fotone vada da A a B, passando per lo specchio:

- calcolo tempo di percorrenza di ciascun possibile cammino: A $\rightarrow$ specchio $\rightarrow$ B
- calcolo per ciascun percorso la quantità: $e^{i\omega t_k} \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ probabilità di arrivo del fotone $\propto \left| \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\omega t_k} \right|^2$



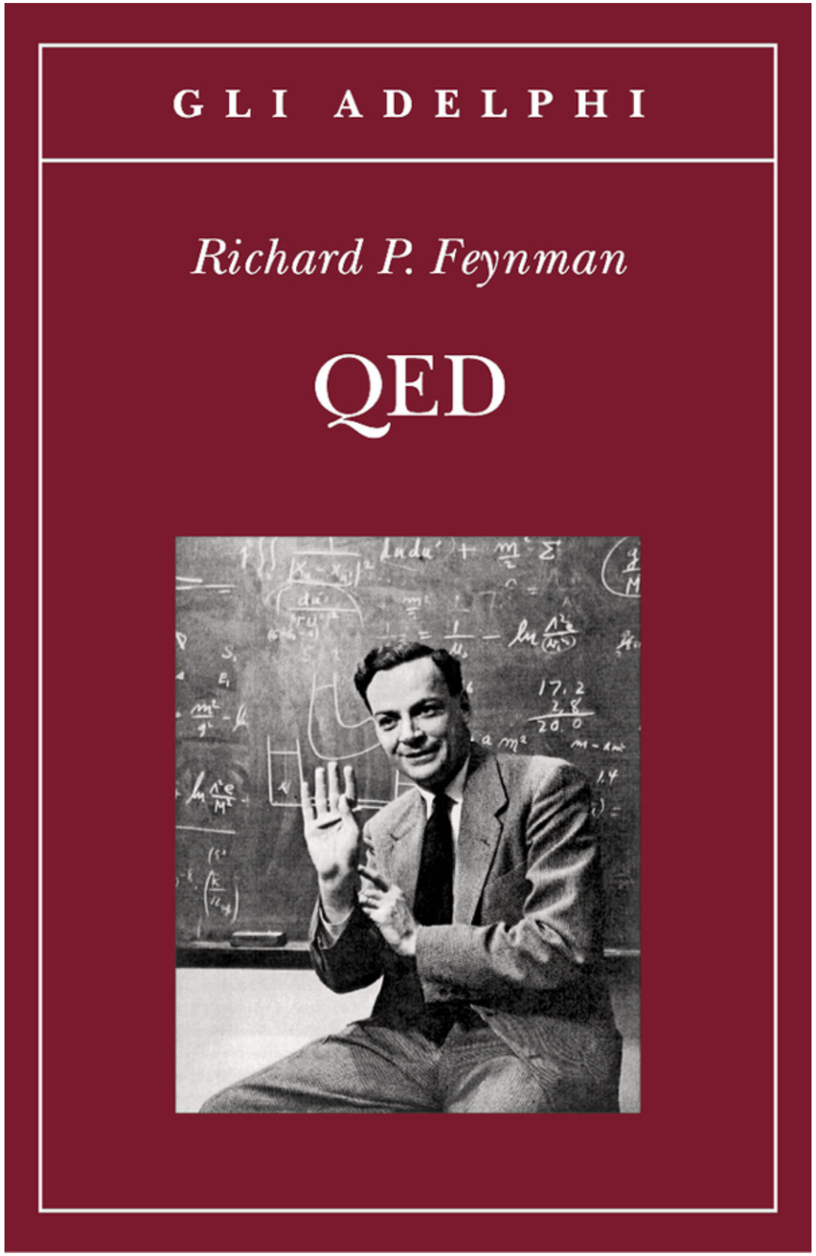
calcolo dei tempi t_k (compito per casa) → curva sopra rappresentazione grafica della somma: ciascun vettore corrisponde a $e^{i\omega t_k}$



- il punto C corrisponde al tempo minimo: se consideriamo i percorsi nel suo intorno, il tempo di percorrenza non cambia
  → i vettori corrispondenti sono all'incirca paralleli

- intorno agli estremi i tempi di percorrenza sono molto diversi
  → i vettori corrispondenti hanno orientazioni molto diverse

probabilità totale = quadrato della distanza tra i due estremi → proviene quasi tutta dalla regione dove i vettori sono paralleli; vettori con orientazioni molto diverse tendono a cancellarsi tra loro


GLI ADELPHI
Richard P. Feynman
QED