



La costante di Planck

Danilo Babusci, Susanna Bertelli

danilo.babusci@Inf.infn.it

bertelli@fe.infn.it

Stage Estivi – giugno 2017

Introduzione

Convinzione comune tra i fisici di fine '800 è che con la dimostrazione dell'esistenza delle onde elettromagnetiche (**Hertz – 1888**), la comprensione della natura sia completa:

- ✓ meccanica dei corpi (**Newton**)
- ✓ elettromagnetismo (**Maxwell**)



... basta soltanto *misurare meglio alcune quantità* e spiegare alcuni *fenomeni di minore importanza*:

- **effetto fotoelettrico** (capacità della luce UV di indurre corrente in un conduttore)
- **assorbimento/emissione nei gas** (spettri con righe)
- **radiazione di corpo nero**

... è lo studio di questi fenomeni “minori” che scatena la crisi della fisica “classica” → **meccanica quantistica**

Introduzione

Convinzione comune tra i fisici di fine '800 è che con la dimostrazione dell'esistenza delle onde elettromagnetiche (**Hertz – 1888**), la comprensione della natura sia completa:

- ✓ meccanica dei corpi (**Newton**)
- ✓ elettromagnetismo (**Maxwell**)



... basta soltanto *misurare meglio alcune quantità* e spiegare alcuni *fenomeni di minore importanza*:

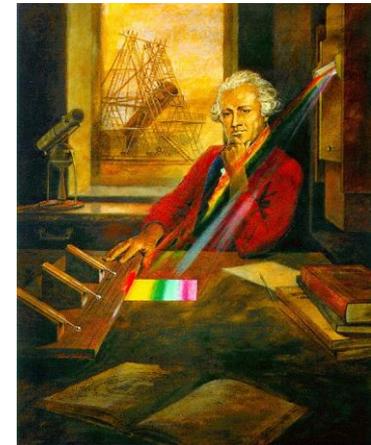


- **effetto fotoelettrico** (capacità della luce UV di indurre corrente in un conduttore)
- **assorbimento/emissione nei gas** (spettri con righe)
- **radiazione di corpo nero**

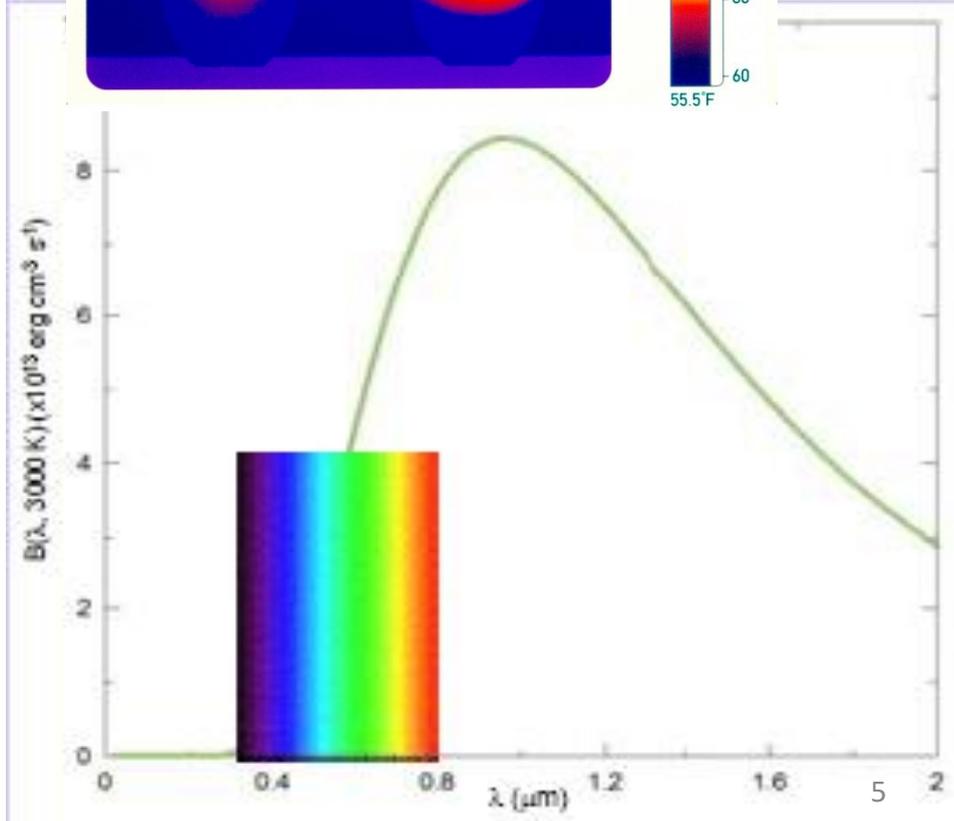
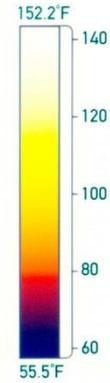
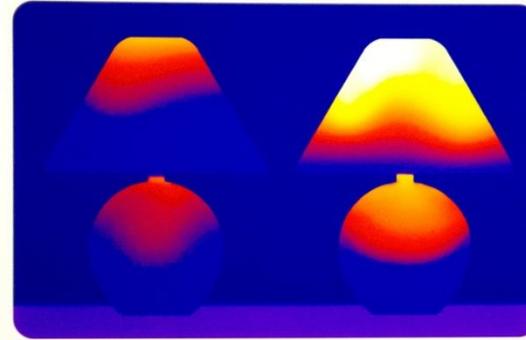
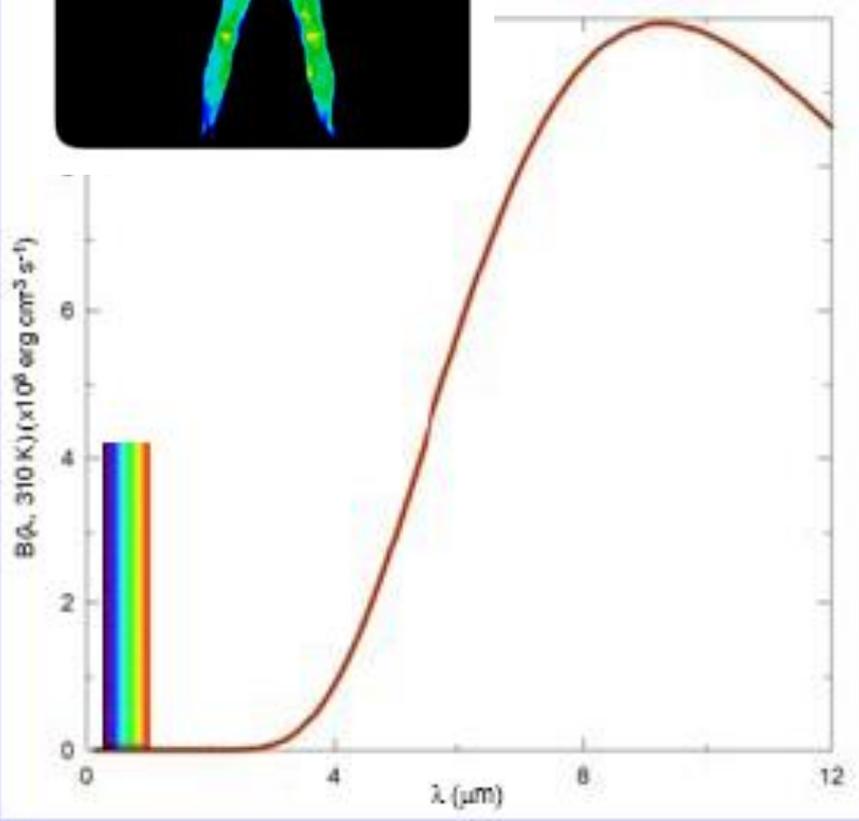
... è lo studio di questi fenomeni “minori” che scatena la crisi della fisica “classica” → **meccanica quantistica**

Emissione di Radiazione

- ogni corpo a temperatura T (non in equilibrio termico con l'ambiente circostante) emette energia sotto forma di radiazione e.m. (**calore**)
 - oscillazione delle cariche elettriche contenute nel corpo (**Maxwell**)
- correlazione temperatura-colore (**Herschel – 1800**): più alta T più la luce è spostata verso il blu (piccole lunghezze d'onda λ = alte frequenze ν)
 - spettro della luce solare
- ogni oggetto emette radiazione su tutte le lunghezze d'onda λ ma con una distribuzione di energia in funzione di λ che dipende dalla temperatura



Emissione di Radiazione



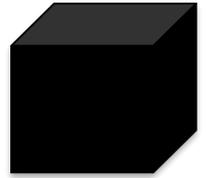
Emissione di Radiazione



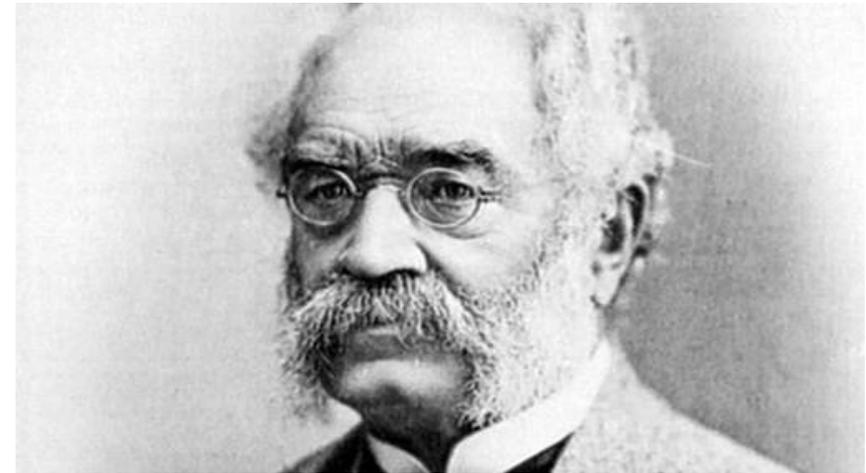
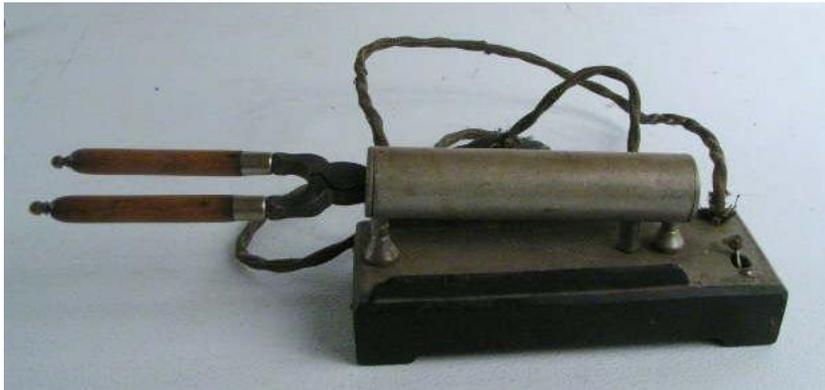
Emissione di Radiazione



Corpo Nero



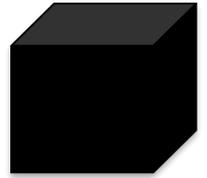
comprensione dei corpi incandescenti ha enorme impatto nelle produzioni industriali di stufe, piastre elettriche, lampade ... → necessario uno standard di misurazione dell'intensità luminosa



E. W. von Siemens

Idea: misura della temperatura degli oggetti dall'analisi della radiazione emessa → necessario modello di riferimento, i.e., oggetto che fornisce una radiazione che dipende soltanto dalla sua temperatura e non dalla sua forma e composizione chimica → **corpo nero**

Corpo Nero



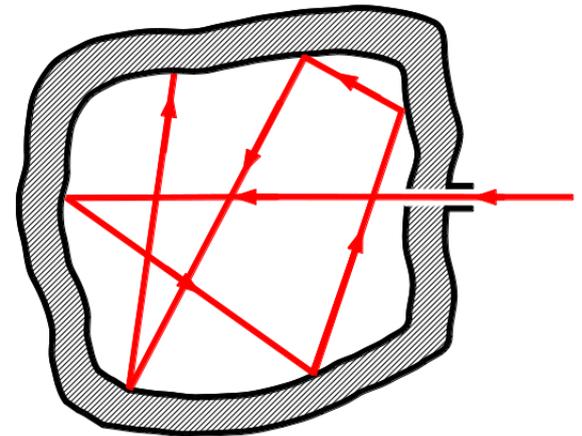
corpo nero = un qualunque oggetto che assorbe tutta la radiazione che incide su di esso, senza trasmetterne/rifletterne alcuna

equilibrio termico: emissività e = assorbimento a → **corpo nero**: $e = a = 1$

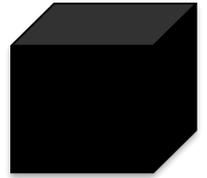
NB – concetto ideale: in natura sono possibili solo approssimazioni più o meno buone, i.e. $a < 1$

corpo nero di **Kirchhoff**: cavità mantenuta a temperatura costante, su cui è praticato piccolo foro

radiazione entrante viene assorbita e riemessa un grandissimo numero di volte prima di riuscire



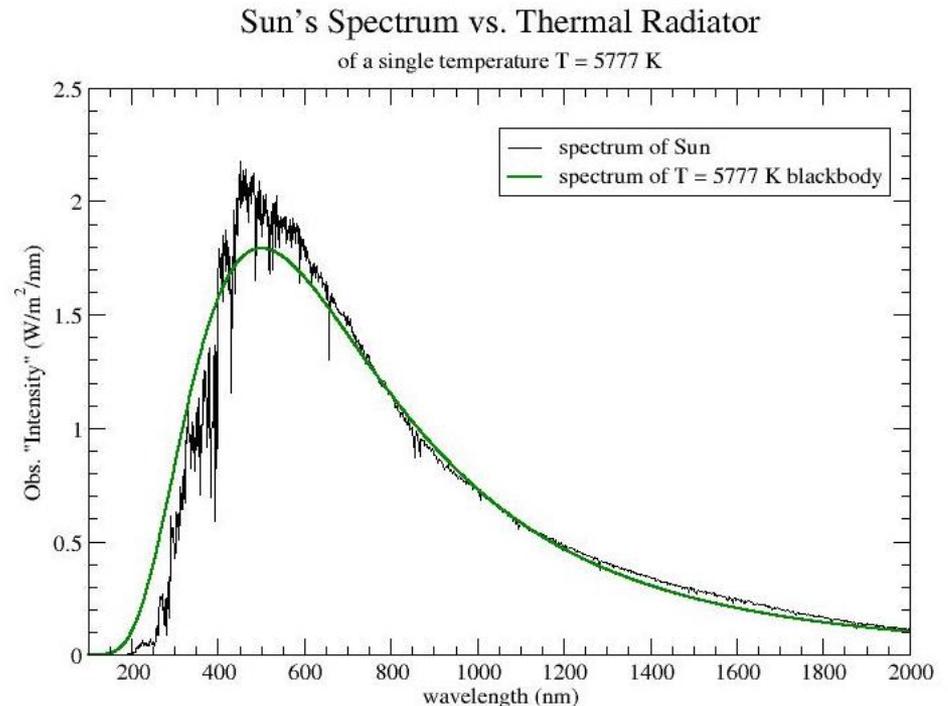
Corpo Nero



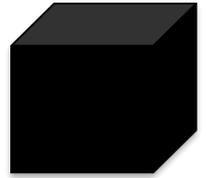
bilancio energetico + principio dell'equilibrio dettagliato* → intensità per unità di lunghezza d'onda della radiazione all'interno della cavità dipende solo dalla temperatura T a cui essa si trova

* all'equilibrio, energia emessa = energia assorbita $\forall \lambda$

Sperimentalmente: forma dello spettro di un corpo nero dipende solo dalla sua temperatura T → tutti i corpi incandescenti, a una data T , emettono radiazione termica con una distribuzione in lunghezza d'onda λ che è ben approssimata da quella di un corpo nero ideale



Corpo Nero



Problema: interpretazione dei dati in termini della fisica del tempo
(termodinamica + elettromagnetismo)

✓ Wien



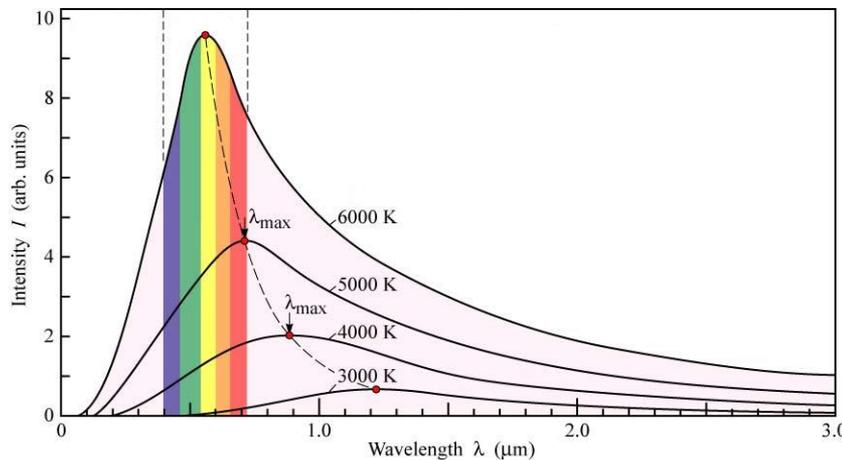
- potere emissivo*

$$\Psi_{\lambda} = \frac{1}{\lambda^5} F(\lambda T)$$

*potenza per unità di superficie emessa in $d\lambda$

- legge di spostamento

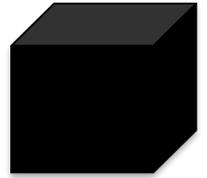
$$\lambda_{\max} T = \text{costante}$$



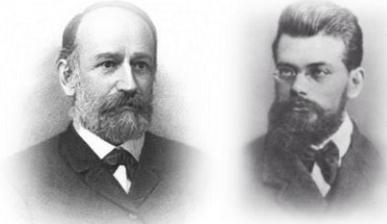
sperimentalmente:

$$\text{costante} = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Corpo Nero



✓ Stefan & Boltzmann



potenza emessa per unità di superficie (i.e., $\int_0^\infty d\lambda \Psi_\lambda$)

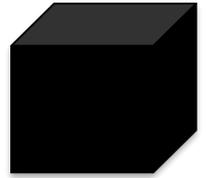
$$\Psi_{\text{tot}} = \sigma T^4$$

teoria (Boltzmann): $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$



rimane da determinare un quadro teorico in grado di predire la forma dello spettro, i.e., la forma della funzione $F(\lambda T)$

Spettro del Corpo Nero



Forma di $F(\lambda T)$?

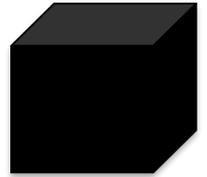
- Wien

somiglianza tra lo spettro di corpo nero e la distribuzione di velocità di Maxwell → emissione di radiazione legata (in che modo?) con l'agitazione termica → legge di radiazione:

$$F(\lambda T) = C e^{-C'/(\lambda T)}$$

- NB – no solido fondamento teorico;
- potere emissivo è ben riprodotto per λ piccola ma sottostimato per λ grande;
- C e C' determinate soltanto per via sperimentale;

Spettro del Corpo Nero



- Rayleigh & Jeans

assorbimento/emissione in cavità solo tramite onde e.m. stazionarie;
associazione onda stazionaria – oscillatore armonico* → energia in
intervallo infinitesimo di λ :

$$\frac{dE}{d\lambda} = N(\lambda) \langle \epsilon_\lambda \rangle$$

energia media della
oscillazione con
lunghezza d'onda λ

n. di modi di oscillazione di
lunghezza d'onda tra λ e $\lambda +$
 $d\lambda$

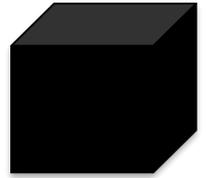
$$N(\lambda)$$

caso 1-D: condizione di stazionarietà su segmento lungo L

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Sistema meccanico che reagisce ad una perturbazione all'equilibrio con un'accelerazione di richiamo proporzionale allo spostamento subito

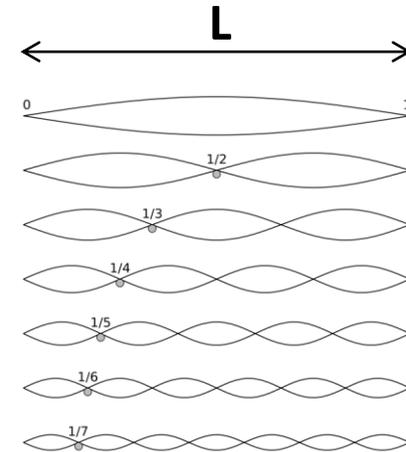
Spettro del Corpo Nero



→ $n = \frac{2L}{\lambda}$

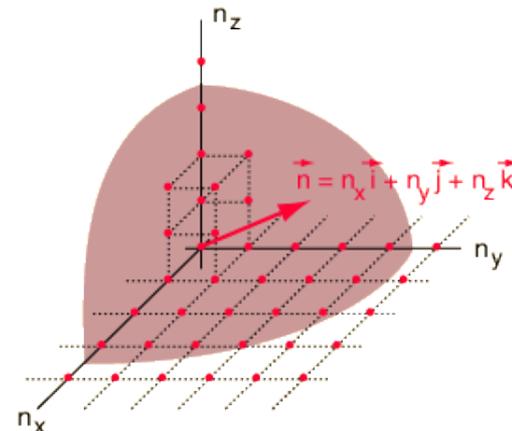
n. dei modi in intervallo infinitesimo $d\lambda$
(a meno del segno)

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{2L}{\lambda^2}$$

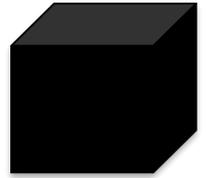


caso 3-D: cubo di spigolo L

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{2L}{\lambda}$$



Spettro del Corpo Nero



volume spazio dei modi: sfera di raggio n $V_n = \frac{4\pi}{3} n^3 = \frac{32\pi}{3} \frac{L^3}{\lambda^3}$

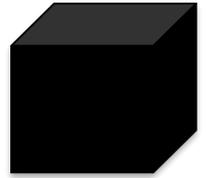
- radiazione e.m. \rightarrow 2 stati di polarizzazione
- $n_x, n_y, n_z > 0 \rightarrow$ un solo ottante $\rightarrow \bar{V}_n = \frac{2V_n}{8} = \frac{8\pi}{3} \frac{L^3}{\lambda^3}$

n. dei modi in intervallo infinitesimo $d\lambda$ (a meno del segno)

$$N(\lambda) = \frac{d\bar{V}_n}{d\lambda} = 8\pi \frac{L^3}{\lambda^4}$$

NB - per unità di volume: $n_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}$

Spettro del Corpo Nero



$$\langle \epsilon_\lambda \rangle$$

1. teorema di **equipartizione** dell'energia: all'equilibrio, alla temperatura T , energia cinetica media di un oscillatore = $\frac{1}{2} k_B T$
2. teorema del **viriale**: $\langle E_{\text{kin.}} \rangle = \langle E_{\text{pot.}} \rangle$

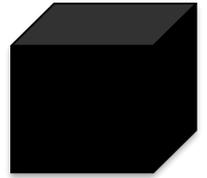


$$\langle \epsilon_\lambda \rangle = k_B T$$

Per cui:

$$\rho(\lambda, T) = \frac{1}{L^3} \frac{dE}{d\lambda} = n_\lambda \langle \epsilon_\lambda \rangle = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T$$

Spettro del Corpo Nero



NB - Metodo alternativo per ricavare l'energia media dell'oscillatore
Meccanica Statistica (**Gibbs**): in un sistema in equilibrio termico a
temperatura T , contenente un numero molto grande di **elementi
uguali**, la probabilità di trovare un elemento con energia E è
proporzionale a

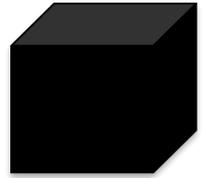
$$\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

Normalizzazione della probabilità: $\int_0^{\infty} dE P(E) = 1$

$$\longrightarrow \int_0^{\infty} dE N e^{-E/(k_B T)} = 1 \quad \longrightarrow \quad N = \frac{1}{k_B T}$$

i.e.
$$P(E) = \frac{1}{k_B T} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

Spettro del Corpo Nero



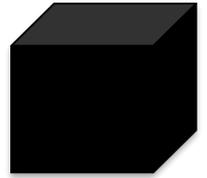
energia media di un oscillatore:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty dE E P(E)}{\int_0^\infty dE P(E)} = \int_0^\infty dE \frac{E}{k_B T} e^{-E/(k_B T)}$$

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= k_B T \int_0^\infty dx x e^{-x} = -k_B T \int_0^\infty (d e^{-x}) x \\ &= -k_B T \left\{ x e^{-x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dx e^{-x} \right\} \end{aligned}$$

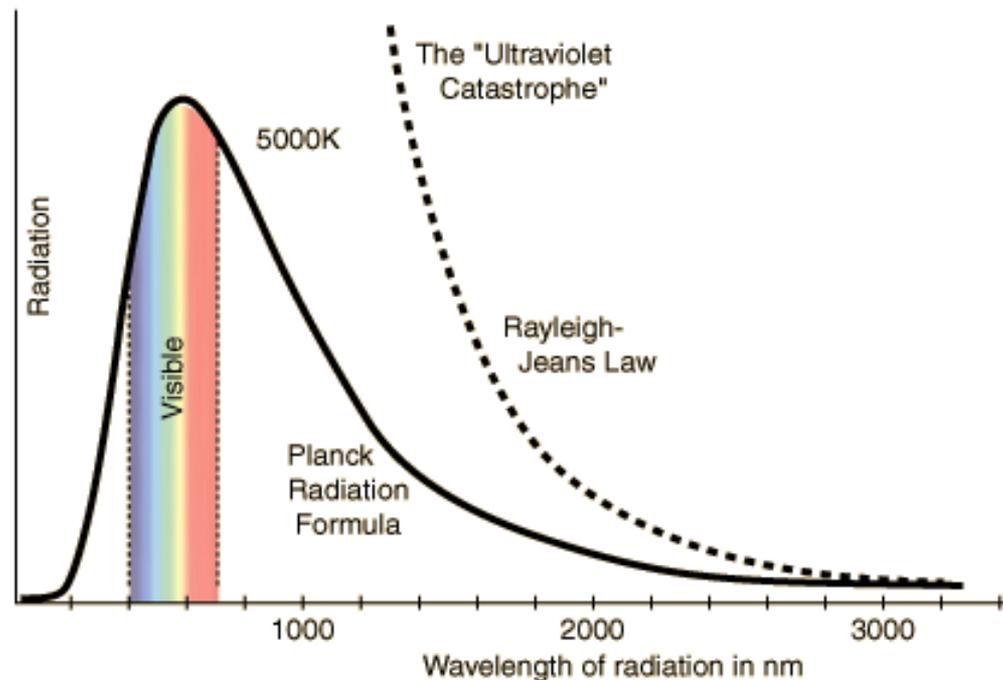
i.e. $\langle E \rangle = k_B T$

Spettro del Corpo Nero

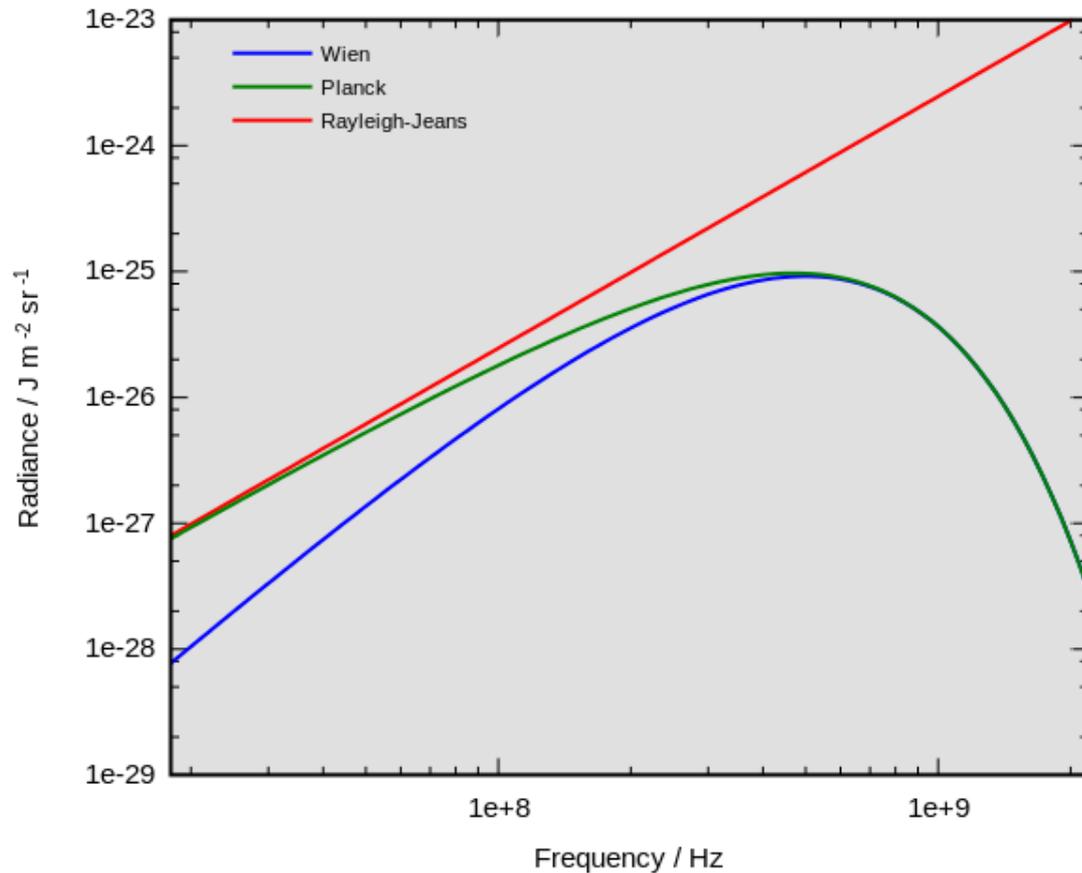
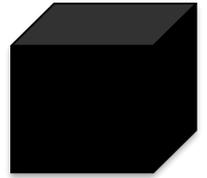


Sebbene teoricamente fondata, la formula **Rayleigh-Jeans**:

- è in accordo con i dati sperimentali solo per elevati valori di λ
- diverge nel limite valori $\lambda \rightarrow 0$ (**catastrofe ultravioletta**)



Spettro del Corpo Nero



NB – la curva verde è la distribuzione di **Planck** (vedi avanti), perfettamente in accordo con l'osservazione sperimentale

Planck

catastrofe ultravioletta può essere evitata “spegnendo” i modi di piccola lunghezza d’onda (alta frequenza) → i modi di vibrazione degli oscillatori non sono tutti ugualmente possibili.

Fisica Classica non fornisce alcun modo teoricamente fondato per realizzare questo filtro ad alta frequenza.

Planck: ogni oscillatore può scambiare energia in multipli interi di un “quanto” fondamentale, la cui taglia è

$$E = h\nu$$

costante di Planck

NB - $h = 6.62606957 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Planck

Perché questa idea funziona?

oscillatore di frequenza ν può scambiare energia con la radiazione di stessa frequenza soltanto in “pacchetti” di taglia

$$h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots, nh\nu, \dots$$

→ a frequenza elevata gli scambi energetici sono consistenti → impossibile in un corpo all’equilibrio: comporterebbe squilibrio energetico troppo forte

il corpo nero è come il nostro portafoglio: tutti gradiremmo che fosse (almeno) in equilibrio; se associamo i diversi tagli di banconote a oscillatori di frequenza diversa, è chiaro che lo scambio di banconote da 5 e 10 € è molto più comune, e meno destabilizzante, di quello di banconote da 500 €

Planck

NB – per [Planck](#) la quantizzazione valeva solo per la materia che emette e assorbe radiazione (i.e., le cariche elettriche oscillanti della parete della cavità), non per la radiazione stessa; pensava che la radiazione fosse come il burro, che può essere prodotto in quantità arbitrarie, ma viene comprato e venduto solo in multipli di 100 g. Fu [Einstein](#) che nel 1905 propose che l'energia della radiazione di frequenza ν fosse essa stessa un multiplo intero di $h\nu$, e usò tale idea per spiegare perché nell'effetto fotoelettrico nessun elettrone viene emesso se ν non supera un valore di soglia ([vedi avanti](#)).

Con l'ipotesi della quantizzazione, l'energia media di un oscillatore diviene ([cfr. slide 16](#)):

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-E_n/(k_B T)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/(k_B T)}} \quad E_n = n h \nu$$

Planck

Posto:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$\longrightarrow \langle E \rangle = \frac{1}{Z} \left(-\frac{dZ}{d\beta} \right) = -\frac{d}{d\beta} \ln Z$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n h \nu} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h \nu})^n \quad \longrightarrow \quad Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta h \nu}}$$

$$\longrightarrow \langle E \rangle = \frac{h \nu}{e^{h \nu / (k_B T)} - 1}$$

NB – a differenza del caso classico, l'energia media dipende anche da ν , ed è proprio questa dipendenza che cancella la divergenza in $n_\lambda \rightarrow$ la catastrofe ultravioletta scompare

Planck

Quindi:

$$\rho(\lambda, T) = n_\lambda \langle E \rangle = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hc/(k_B \lambda T)} - 1}$$

Limiti notevoli:

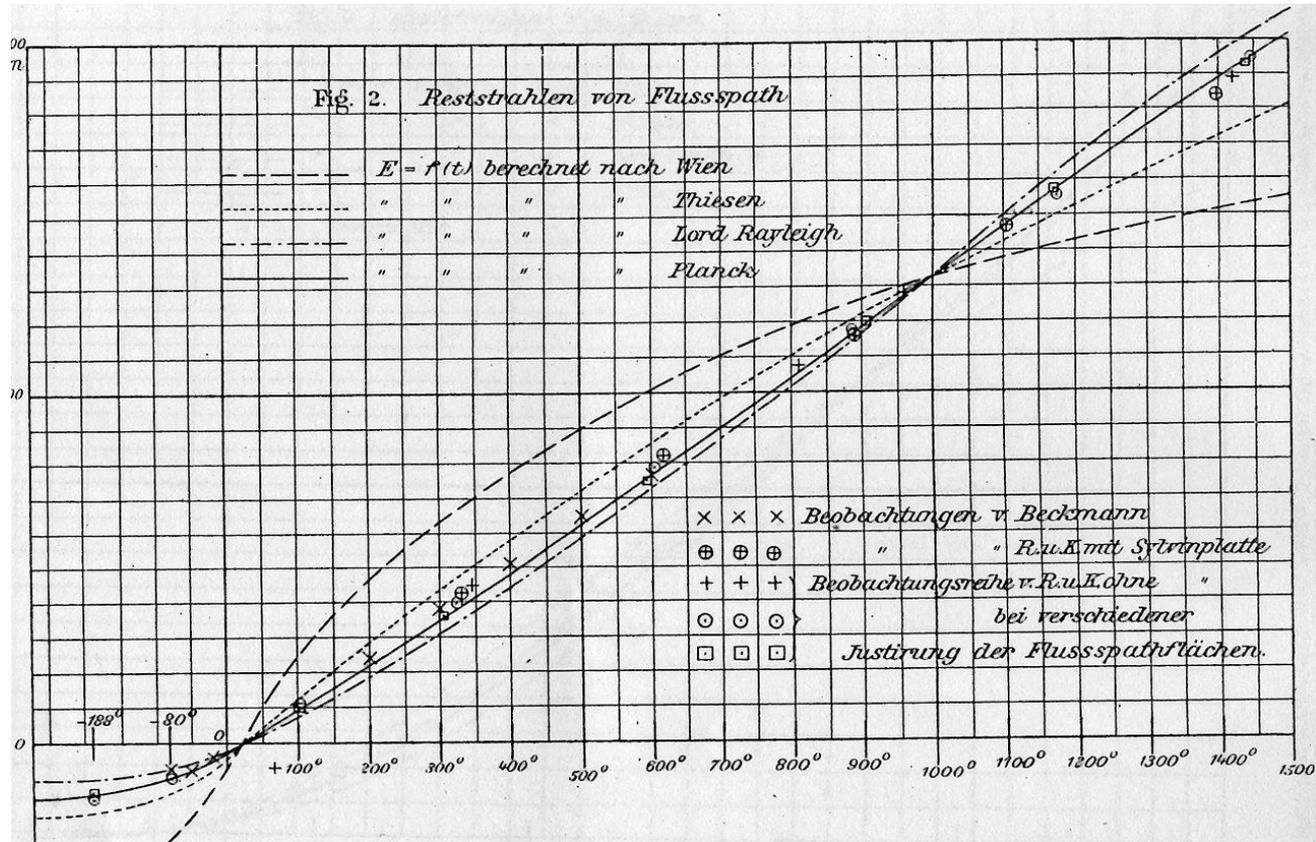
➤ $\lambda \rightarrow 0$ $\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hc/(k_B \lambda T)}} = C e^{-C'/(\lambda T)}$

Wien

➤ $\lambda \rightarrow \infty$ $\rho(\lambda, T) \approx \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{hc/(k_B \lambda T)} = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T$

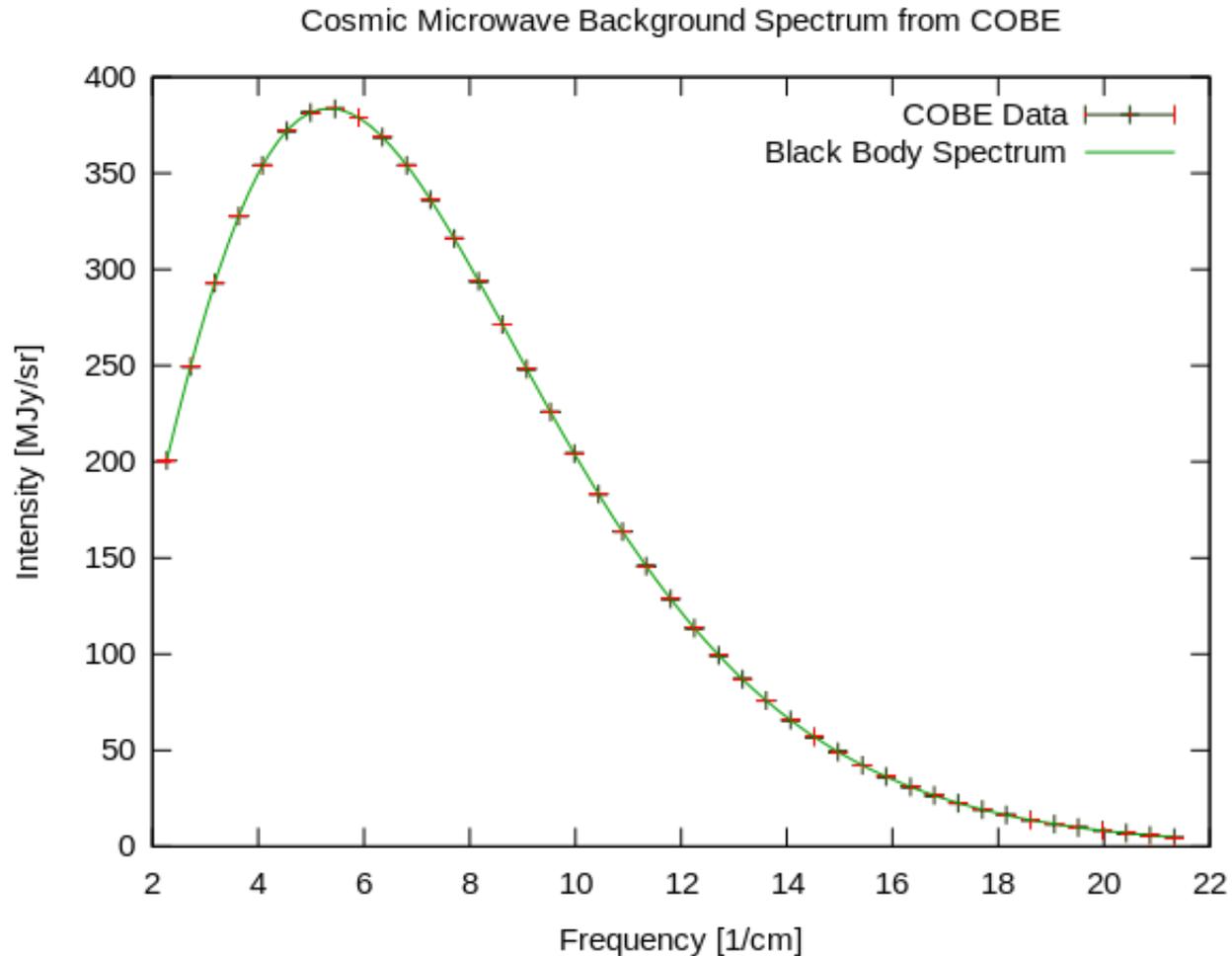
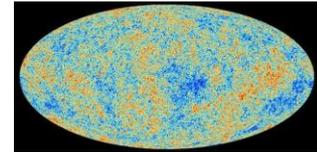
Rayleigh
Jeans

Planck



Misure sperimentali di Ruben & Kayser

Fondo Cosmico a Microonde



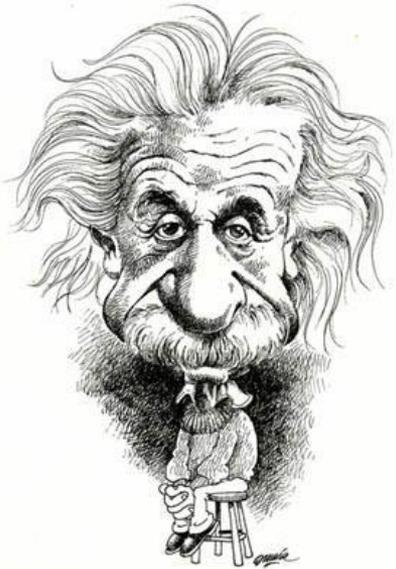
Meccanica Quantistica

“I tried for many years to save physics from discontinuous energy levels...”

[Max Planck]

- non c'è modo di spiegare lo spettro di corpo nero su base puramente classica;
- non tutte le quantità di energia possono essere scambiate... (livelli di energia discreti, ovvero quantizzati);
- nascita della **teoria quantistica** → molti dei comportamenti inspiegabili in chiave classica risultano evidenti alla luce della quantizzazione

Photoelectric effect



Electrons emission by metals when hit by an intense light beam. (von Lénárd, 1902)

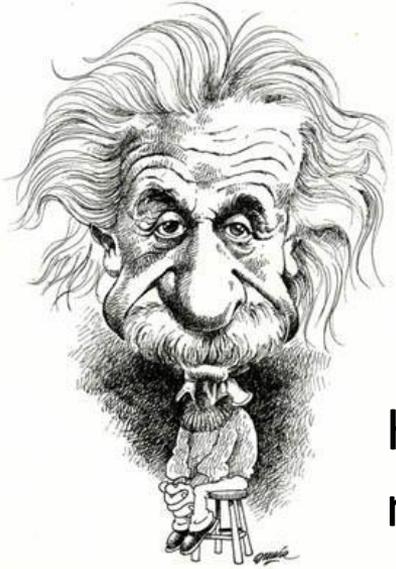
Experimental observations:

- The higher is the light intensity, the larger is the number of electrons (with same energy) emitted.
- The higher is the frequency of the incident radiation, the greater is the energy of electrons.

Classical Physics is not able to explain it; the energy of wave depends on the intensity, not frequency ν

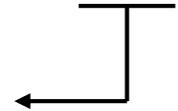
Einstein (1905): the energy of the light beam is distributed in bundles (quanta) sized $h\nu$ that can be transferred to the electrons.

Photoelectric effect



Energy of emitted electrons $T = h\nu - W$

Work function, is the minimum energy required to remove an electron from the surface of the material, independent of ν



Higher intensity \rightarrow larger number of quanta \rightarrow larger number of electrons emitted with T

Einstein (1915): in the interactions with matter, quanta transfer also a momentum:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$



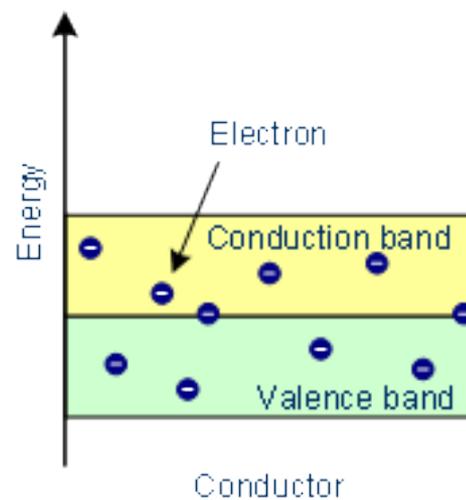
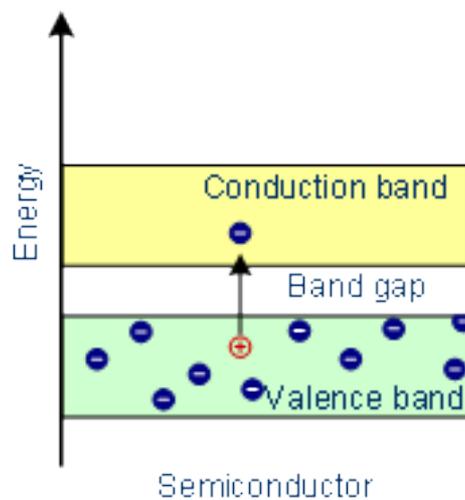
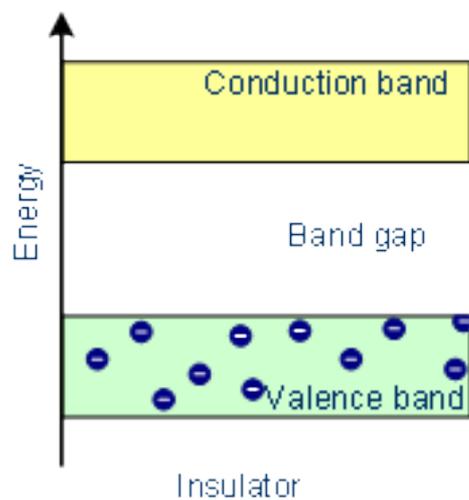
Light particle-like: photons

Il nostro esperimento

- Scopo della misura è dare una stima della costante di Planck
- Col nostro set-up sperimentale ci aspettiamo di poter misurare h con un' accuratezza del 10-20%



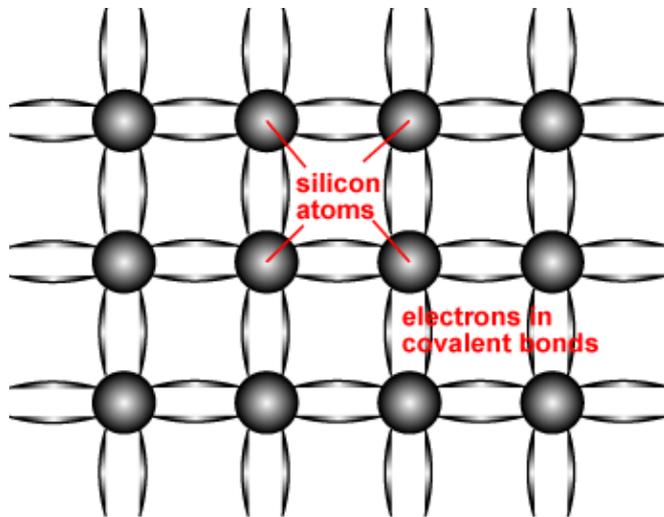
Il diodo



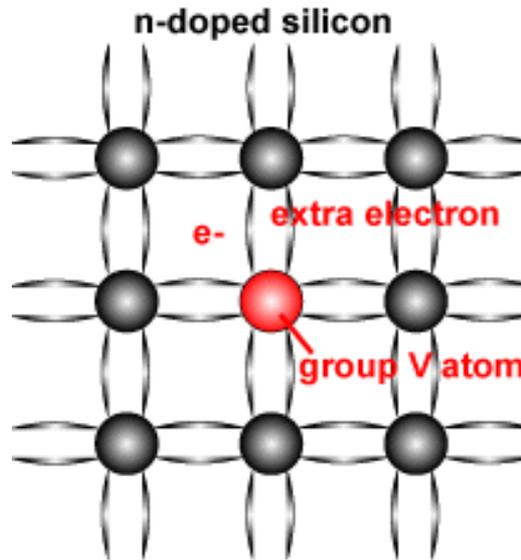
Il diodo (1/2)

Un diodo p-n è un tipo di *semiconduttore* a due terminali in grado di condurre la corrente in una sola direzione, basato sulla *giunzione* di un semiconduttore drogato tipo p e di uno drogato tipo n

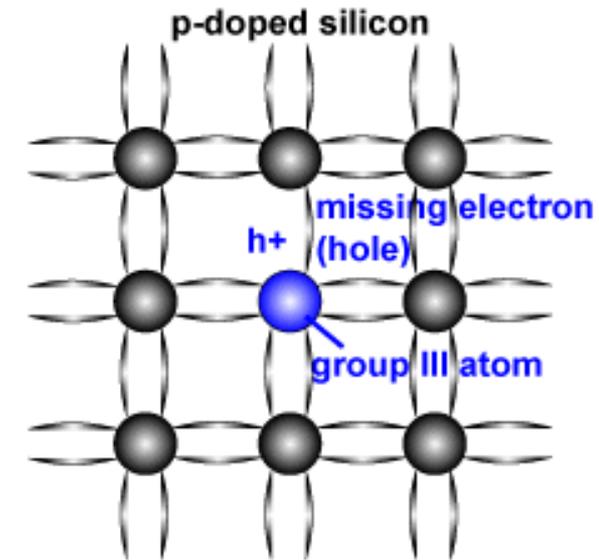
(Wikipedia)



Reticolo di Silicio



Semiconduttore drogato tipo-n



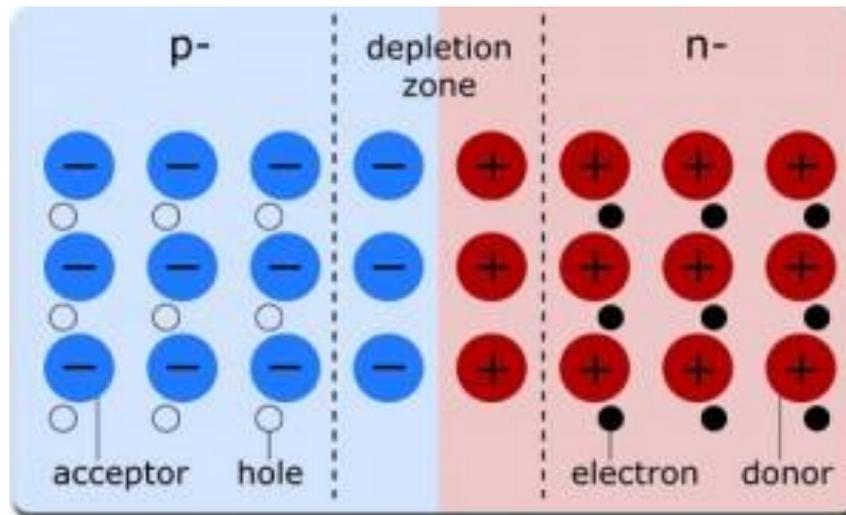
Semiconduttore drogato tipo-p

Il diodo (2/2)

Una “lacuna” si comporta esattamente come un elettrone di carica positiva:

- Cariche negative sono disponibili nella zona tipo-n
- Cariche positive sono disponibili nella zona tipo-p

La **zona di svuotamento** è una regione isolante all'interno di un semiconduttore drogato. Il drogaggio comporta che nel semiconduttore ci sia un eccesso di elettroni liberi o di lacune che si comportano da portatori di carica permettendo il passaggio di corrente; nella regione di svuotamento, gli elettroni liberi e le lacune si ricombinano e il trasporto di carica cessa.



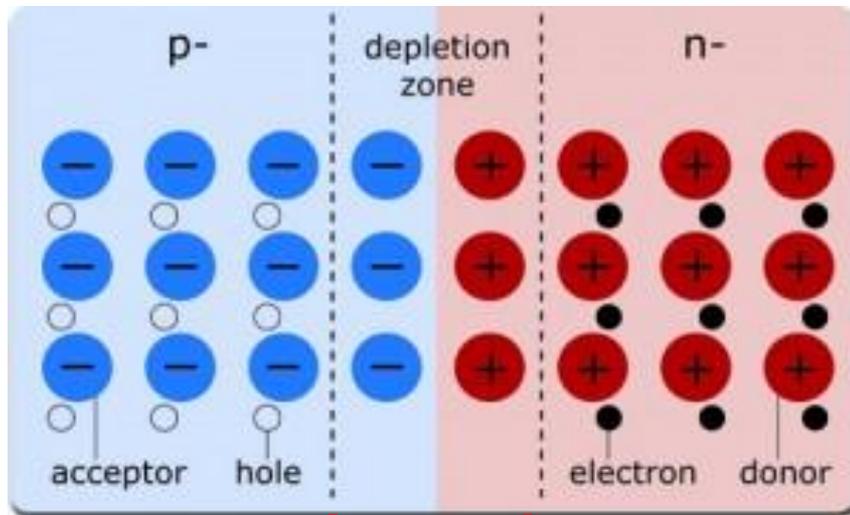
zona di svuotamento

Il diodo (2/2)

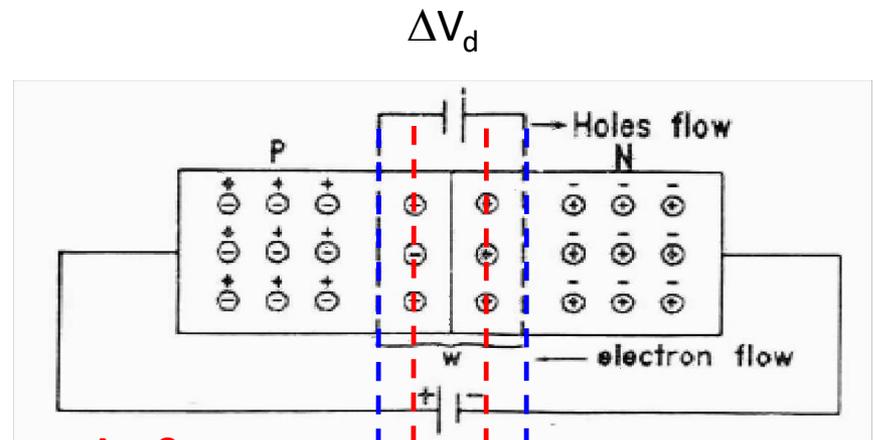
Una “lacuna” si comporta esattamente come un elettrone di carica positiva:

- Cariche negative sono disponibili nella zona tipo-n
- Cariche positive sono disponibili nella zona tipo-p

https://www.youtube.com/watch?v=Vrl-cl-X-_w



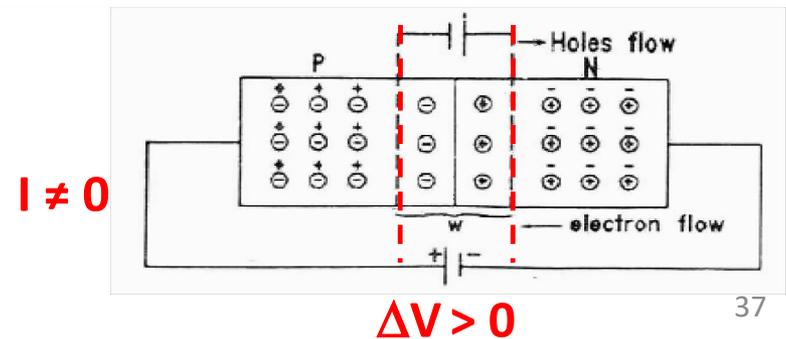
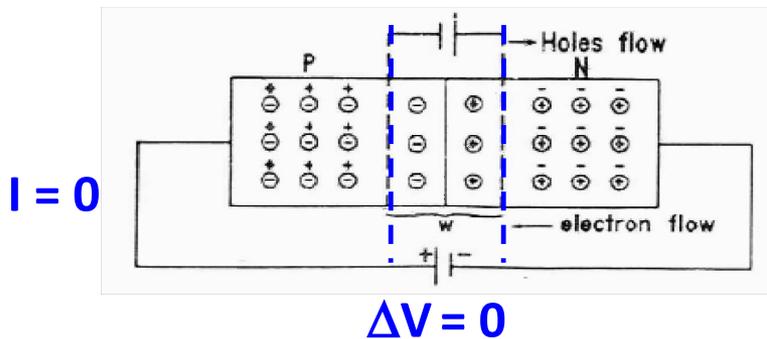
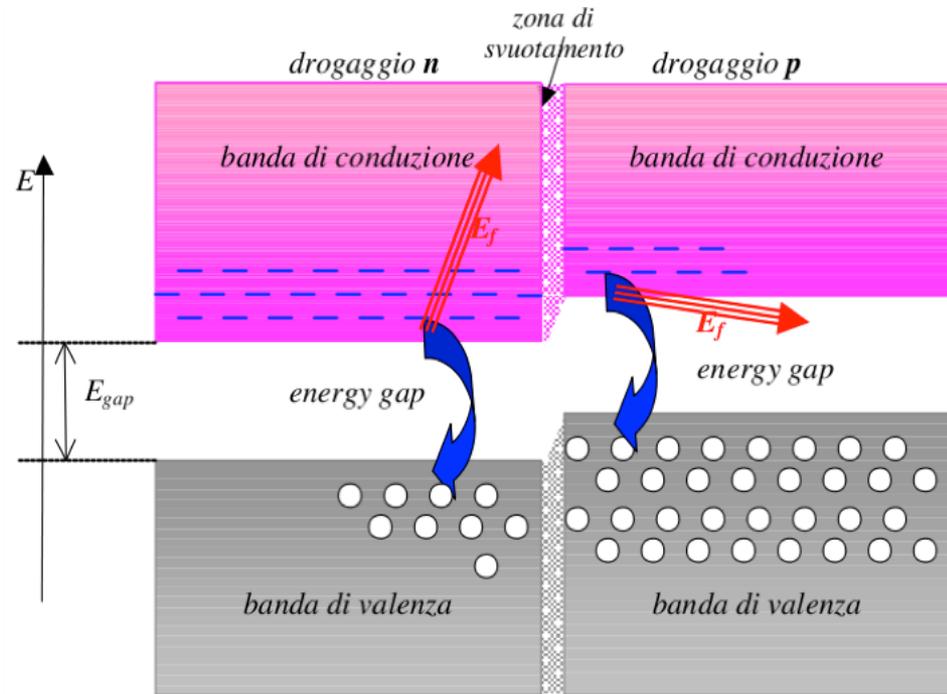
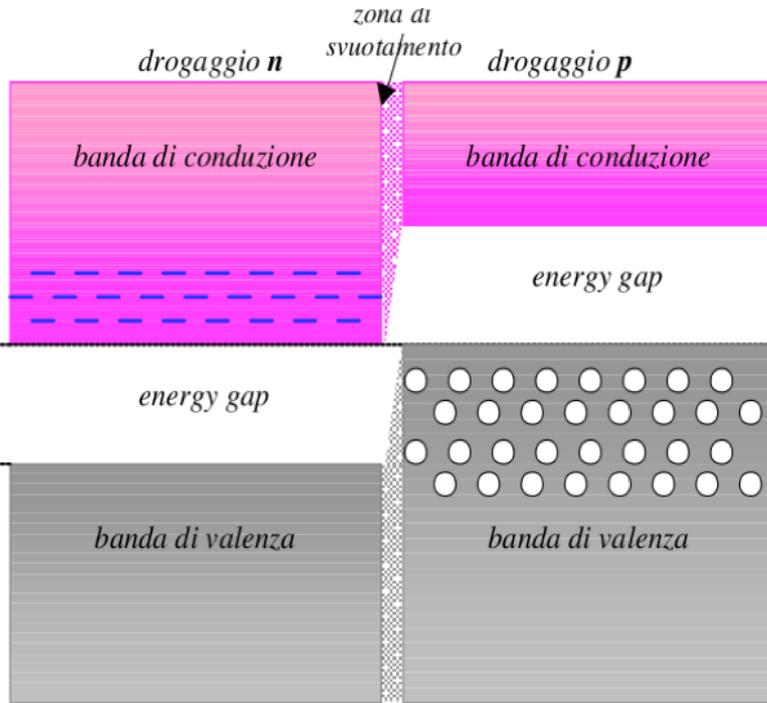
zona di svuotamento



$$\Delta V = V_p - V_n > 0$$

Il diodo LED (Light Emitting Diode)

Diodo a emissione luce: dispositivo che sfrutta la capacità di alcuni semiconduttori di emettere fotoni attraverso emissione spontanea.



Misura di h con il diodo LED

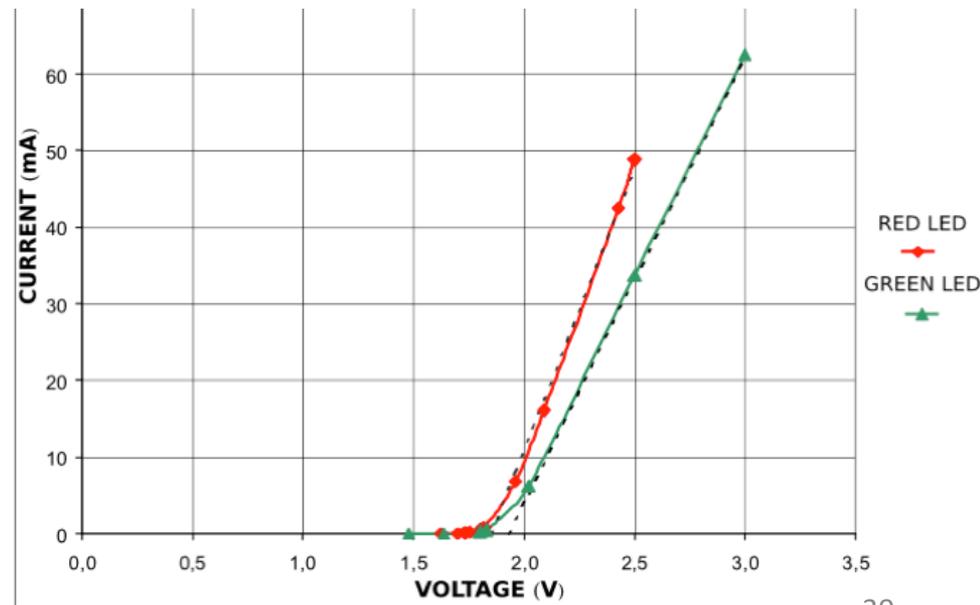
- Applicando una tensione abbastanza grande alla giunzione, il LED emette fotoni che hanno tutti la stessa frequenza, f (dipendente solo da E_{gap})
- Quando il LED comincia ad illuminarsi, l'energia E persa da ogni portatore di carica che attraversa la giunzione è convertita in energia di un singolo fotone
- L'energia delle cariche in queste condizioni è $E = eV_{\text{th}}$ con e carica elementare (1.602×10^{-19} C) e V_{th} potenziale di soglia per il LED
- L'energia del fotone emesso sarà, secondo la teoria di Planck, $E = hf$ (con h costante di Planck)

l'energia è conservata nel processo, quindi: $eV_{\text{th}} = hf$

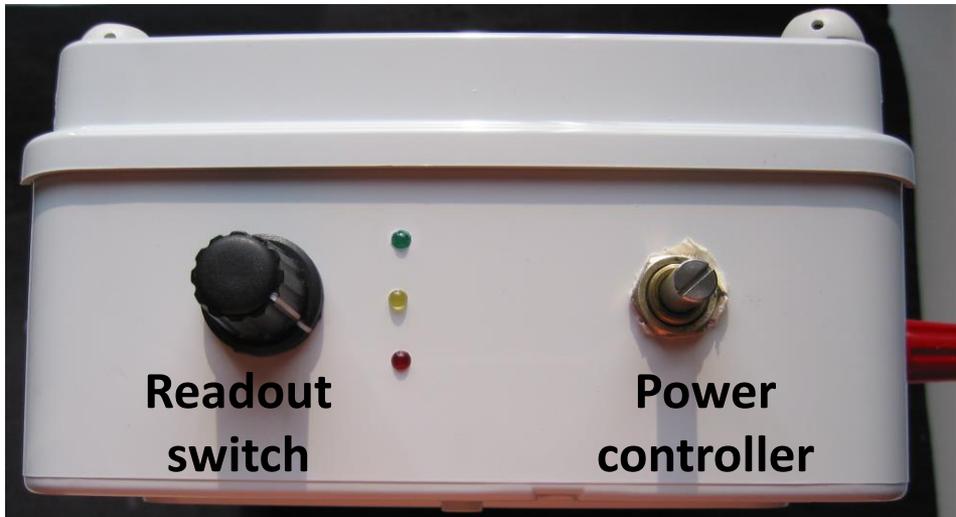
La misura: cosa fare...

Occorre determinare la tensione di soglia del LED, V_{th}

- 1) Variare la tensione di polarizzazione, annotando la corrispondente corrente che attraversa la giunzione
- 2) Costruire il grafico “ I vs V ”
- 2) Estrapolare il punto a $I = 0$ dal fit lineare dei punti in conduzione ohmica. Quel punto corrisponde alla V_{th}
- 4) Ricavare h dalla relazione $eV_{th} = hf$, noti e ed f

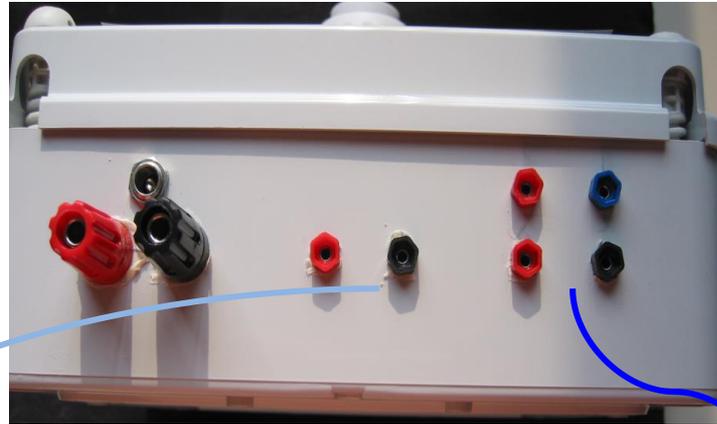


Set-up sperimentale



Attenzione! Gli strumenti

Amperometro



Voltmetro

